



Федеральное агентство морского и речного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С.О. Макарова»**

Воронежский филиал
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С.О. Макарова»

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ
АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
Б1.Б. 8 «Математика»

(Приложение к рабочей программе дисциплины)

Уровень образования:	Высшее образование – бакалавриат	
Направление подготовки:	09.03.02 Информационные системы и технологии	
Язык обучения:	Русский	
Кафедра:	Математики, информационных систем и технологий	
Форма обучения:	Очная	Заочная
Курс:	1	1
Составитель:	к.ф- м.н. Кустов А.И.	

ВОРОНЕЖ 2019 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ	3
1.1 Перечень компетенций и этапы их формирования в процессе освоения дисциплины.....	3
1.2. Паспорт фонда оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации обучающихся.....	3
1.3 Критерии оценивания результата обучения по дисциплине и шкала оценивания	4
2. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ	5
2.1 Задания для самостоятельной работы и текущего контроля	5
2.2 Критерии оценки качества освоения дисциплины.....	30
3. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ промежуточной аттестации по дисциплине	32
3.1 Теоретические вопросы для проведения экзамен	32
3.2 Показатели, критерии и шкала оценивания письменных ответов на экзамене:	34

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

1.1 Перечень компетенций и этапы их формирования в процессе освоения дисциплины

В результате освоения ОПОП бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Код компетенции	Содержание компетенции	Планируемые результаты освоения дисциплины
ОПК-2	способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования	Знать: фундаментальные научно-исследовательские работы в области; основные термины и понятия системного анализа; методы исследования систем и построения моделей; математические модели оптимального управления для непрерывных и дискретных процессов. Уметь: проводить научные исследования, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования. оценивать параметры моделей; содержательно интерпретировать результаты моделирования социально-экономических процессов и систем; анализировать их качество и иметь навыки их корректировки для получения удовлетворительных результатов. Владеть: навыками самостоятельной научно-исследовательской работы; способностью самостоятельно формулировать результаты своей научно-исследовательской работы; опытом проведения системного исследования от этапа постановки задачи и выдвижения гипотез, до анализа результатов и оформления выводов; навыками организации сложных экспертиз и выбора решений; навыками применения инструментов математического моделирования.

1.2. Паспорт фонда оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации обучающихся

№ п/п	Контролируемые темы дисциплины	Код контролируемой компетенции	Наименование оценочного средства
1.	Раздел I. Матрицы.	ОПК-2	Опрос по окончании проведения

	Основные операции над матрицами.		лабораторной работы, практического занятия, задания для самостоятельной работы, экзамен
2.	Раздел II. Векторы.	ОПК-2	Опрос по окончании проведения лабораторной работы, практического занятия, задания для самостоятельной работы, экзамен
3.	Раздел III. Уравнение прямой. Уравнение плоскости, их взаимное расположение	ОПК-2	Опрос по окончании проведения лабораторной работы, практического занятия, задания для самостоятельной работы, экзамен
4.	Раздел IV. Числовые последовательности	ОПК-2	Опрос по окончании проведения лабораторной работы, практического занятия, задания для самостоятельной работы, экзамен
5.	Раздел V. Дифференциал функции	ОПК-2	Опрос по окончании проведения лабораторной работы, практического занятия, задания для самостоятельной работы, экзамен
6.	Раздел VI. Частные производные	ОПК-2	Опрос по окончании проведения лабораторной работы, практического занятия, задания для самостоятельной работы, экзамен
7	Раздел VII. Неопределенный интеграл	ОПК-2	Опрос по окончании проведения лабораторной работы, практического занятия, задания для самостоятельной работы, экзамен
8	Раздел VIII. Определенный интеграл	ОПК-2	Опрос по окончании проведения лабораторной работы, практического занятия, задания для самостоятельной работы, экзамен
9	Раздел IX. Комплексные числа	ОПК-2	Опрос по окончании проведения лабораторной работы, практического занятия, задания для самостоятельной работы, экзамен
10	Раздел X. Решение дифференциальных уравнений	ОПК-2	Опрос по окончании проведения лабораторной работы, практического занятия, задания для самостоятельной работы, экзамен

1.3 Критерии оценивания результата обучения по дисциплине и шкала оценивания

Уровни сформированности компетенции	Основные признаки уровня
Пороговый (базовый) уровень (Оценка «3», Зачтено) (обязательный по отношению ко всем выпускникам к моменту	Знать: теоретические основы использования основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности. Уметь: применять теоретические знания на практике.

завершения ими обучения по ОПОП)	Владеть: способностью использования основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности.
Повышенный (продвинутый) уровень (Оценка «4», Зачтено) (превосходит пороговый (базовый) уровень по одному или нескольким существенным признакам)	Знать: теоретические основы использования основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности. Уметь: применять методы математического анализа и моделирования на продвинутом уровне. Владеть: способностью использования основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности на продвинутом уровне.
Высокий (превосходный) уровень (Оценка «5», Зачтено) (превосходит пороговый (базовый) уровень по всем существенным признакам, предполагает максимально возможную выраженность компетенции)	Знать: теоретические основы использования основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности. Уметь: применять методы математического анализа и моделирования. Владеть: способностью использования основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы теоретического и экспериментального исследования на высоком уровне

2. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

2.1 Задания для самостоятельной работы и текущего контроля

Тема 1. Матрицы. Основные операции над матрицами

Контрольные вопросы:

1. Что называется матрицей
2. Дать определение минора, алгебраического дополнения
3. Сформулировать правило треугольников

Задания для самостоятельной работы:

1. Применение теоремы Лапласа для вычисления определителей n -го порядка (разложение по строке или столбцу).
2. Теорема Лапласа.
3. Определители n -го порядка

Практические задания 1

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{2,3}$ для определителя $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам 1-й строки

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 8 & -4 & 17 \end{vmatrix}$ сведя его к диагональному виду.

5. Решить систему по правилу Крамера

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 2; \\ 5x + 3y - 2z = 0; \\ 3x + 2y - z = -2. \end{cases}$$

6. Решить систему матричным методом $\begin{cases} x + 2y + z = 4; \\ 3x - 5y + 3z = 1; \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$

7. Решить систему по методу Гаусса $\begin{cases} 11x + 3y - z = 2; \\ 2x + 5y - 5z = 0; \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

8. В задачах **1 – 10** данную систему уравнений исследовать и решить тремя способами: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса; в) средствами матричного исчисления.

1. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - y + 3z = -7 \\ x + 2y - z = 4 \\ 3x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - 3y - z = -4 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - 3y - z = 3 \\ x + y + 3z = -2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - 4y - 2z = -3 \\ 3x + y + z = 5 \\ 3x - 5y - 6z = -9 \end{cases}$

$$9. \begin{cases} 7x - 5y = 31 \\ 4x + 11z = -43 \\ 2x + 3y + 4z = -20 \end{cases} \quad 10. \begin{cases} 2x - y - 2z = 3 \\ x + 2y = 4 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$$

Вопросы к лабораторной работе 1

1. Определить количество строк и столбцов

2. Определить число, которое является элементом a_{23} , a_{31} матрицы $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

3. Найти сумму элементов главной диагонали матрицы

4. Найти произведение элементов побочной диагонали матрицы

5. Составить транспонированную матрицу для матрицы

7. Выполнить действие $k \cdot A$, где, $k=4$

8. Найти определитель матрицы

9. Найти ранг матрицы $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 8 & -4 & 17 \end{vmatrix}$

10. Найти обратную матрицу для матрицы

Тема 2. Векторы.

Контрольные вопросы:

1. Как вычислить модуль вектора
2. Что называется проекцией вектора и как она вычисляется
3. Какие операции над векторами знаете
4. Что называется нормой вектора
5. Какой базис называется ортонормированным
6. Векторное и смешанное произведения. Как они вычисляются
7. Векторное произведение в ортонормированном базисе
8. Преобразование координат вектора и точки при переходе к другой системе координат

Задания для самостоятельной работы:

1. Что называется вектором и модулем вектора?
2. Какие векторы называются коллинеарными, компланарными, равными?
3. Могут ли два вектора, имеющих равные модули, быть не равными? Если да, то чем они могут различаться?
4. Все векторы, имеющие один и тот же модуль, отложены из одной точки A пространства. Где находятся концы этих векторов?
5. Какие операции над векторами называются линейными и каковы свойства этих операций?
6. Что называется базисом на прямой, на плоскости и в пространстве?
7. В каком случае векторы называются линейно зависимыми и в каком — линейно независимыми?
8. Докажите, что линейным операциям над векторами соответствуют такие же операции над их компонентами (координатами в некотором базисе).

9. Какой базис называется ортонормированным?
10. Как определяется декартова система координат?
11. Как выражаются координаты вектора через координаты его начальной и конечной точек?
12. Выведите формулы деления отрезка в данном отношении.
13. Центром тяжести треугольника является точка пересечения его медиан. Выведите формулы, выражающие координаты центра тяжести треугольника через координаты его вершин.
14. Что называется скалярным произведением двух векторов, каковы его свойства и как оно выражается через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе?
15. Выведите формулы для длины вектора, угла между двумя векторами и расстояния между двумя точками в декартовой прямоугольной системе координат.
16. Что называется векторным произведением двух векторов, каковы его свойства и как оно выражается через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе?
17. Что называется смешанным произведением трех векторов, каковы его свойства и как оно выражается через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе?
18. Что называется определителем (детерминантом) второго и третьего порядков, каковы их свойства и способы вычисления?
19. Как преобразуются координаты вектора при замене базиса пространства (плоскости)?
20. Какому условию должны удовлетворять координаты трех векторов, чтобы их можно было принять за базис пространства?
21. Каковы формулы преобразования декартовых прямоугольных координат на плоскости?
22. Опишите полярную, цилиндрическую и сферическую системы координат.

Практические задания

4. Написать разложение вектора x по векторам p, q, r .

X	p	q	r
$\{-2, 4, 7\}$	$\{0, 1, 2\}$	$\{1, 0, 1\}$	$\{-1, 2, 4\}$

2. Коллинеарны ли векторы c_1 и c_2 , построенные по векторам a и b ?
 $A = \{1, -2, 3\}$, $b = \{3, 0, -1\}$, $c_1 = 2a + 4b$, $c_2 = 3b - a$.

3. Компланарны ли векторы a, b и c .
 $A = \{2, 3, 1\}$; $b = \{-1, 0, -1\}$; $c = \{2, 2, 2\}$.

5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b .
 $A = p + 2q$; $b = 3p - q$; $|p| = 1$; $|q| = 2$; $(p \wedge q) = \pi / 6$;

6. Даны векторы $a\{a_1, a_2, a_3\}, b\{b_1, b_2, b_3\}, c\{c_1, c_2, c_3\}, d\{d_1, d_2, d_3\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы a, b, c образуют базис и найти координаты вектора d в этом базисе.

1. $a\{3, -1, 1\}, b\{2, 1, 1\}, c\{0, 0, 1\}, d\{1, 2, 4\}$.
2. $a\{1, 4, 1\}, b\{1, 2, 0\}, c\{2, 3, 3\}, d\{1, 2, 3\}$.
3. $a\{1, 2, 2\}, b\{2, 1, 3\}, c\{0, -1, -1\}, d\{1, 2, 1\}$.
4. $a\{1, 3, 1\}, b\{4, -1, 2\}, c\{2, 1, 1\}, d\{0, 3, -1\}$.
5. $a\{1, 3, 0\}, b\{2, 7, 1\}, c\{2, 3, 1\}, d\{-2, -1, 3\}$.
6. $a\{1, 5, 2\}, b\{2, 2, 2\}, c\{0, -3, 1\}, d\{-1, 2, 3\}$.
7. $a\{1, 4, 1\}, b\{2, -1, -4\}, c\{0, 2, 3\}, d\{1, 3, -1\}$.
8. $a\{1, 1, 3\}, b\{0, -1, 2\}, c\{2, 5, 3\}, d\{-2, 1, 3\}$.
9. $a\{1, 2, 4\}, b\{0, 3, 5\}, c\{-2, 1, 1\}, d\{3, 2, 2\}$.
10. $a\{-1, 4, 0\}, b\{2, 3, -4\}, c\{-2, 1, 3\}, d\{2, 1, 1\}$.

7. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти: 1) длину ребра AB ; 2) угол между ребрами AB и AD ; 3) Уравнение плоскости ABC ; 4) уравнение прямой AD ; 5) Угол между

ребром AD и гранью ABC ; 6) площадь грани ABC ; 7) объем пирамиды; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины D на плоскость ABC . Сделать чертеж.

1. $A(3;5;0), B(2;1;7); C(4;2;1); D(3;5;3)$.
2. $A(2;4;1), B(3;0;5); C(9;2;1); D(0;2;5)$.
3. $A(5;1;4), B(-1;0;3); C(3;2;7); D(1;4;8)$.
4. $A(1;2;3), B(0;5;4); C(3;2;2); D(4;2;4)$.
5. $A(-2;3;5), B(1;2;4); C(-3;3;6); D(2;0;4)$.
6. $A(0;1;4), B(1;2;4); C(3;-2;0); D(-2;5;3)$.
7. $A(2;1;4), B(-3;0;2); C(4;-1;3); D(5;2;7)$.
8. $A(0;5;-1), B(2;4;3); C(1;5;3); D(2;-2;1)$.
9. $A(3;1;2), B(-1;4;0); C(-5;1;4); D(2;4;6)$.
10. $A(2;-3;5), B(-4;0;6); C(1;2;2); D(3;4;5)$.

Длина стороны ромба с острым углом 60° равна 2. Диагонали ромба пересекаются в т. $M(1;2)$, причем большая диагональ параллельна оси абсцисс. Составить уравнения сторон ромба. Сделать чертеж.

8. Даны координаты двух вершин треугольника $A(-1;3), B(2;5)$ и точки пересечения его высот $H(1;4)$. Найти координаты третьей вершины треугольника и составить уравнения его сторон. Сделать чертеж.

9. Даны уравнения сторон треугольника: $x + 2y + 1 = 0$, $2x - y - 2 = 0$, $2x + y + 2 = 0$. Составить уравнение высоты, опущенной на третью сторону.

Сделать чертеж.

10. Точка $A(1;2)$ является серединой одного из оснований прямоугольной трапеции, а точка $B(3;-1)$ – серединой средней линии. Боковая сторона, перпендикулярная основаниям, лежит на прямой $(x+1)/3 = (y-2)/4$ уравнения остальных сторон трапеции. Сделать чертеж треугольника

11. Точка $A(2;0)$ является вершиной правильного, а противоположная ей сторона лежит на прямой $x + y - 1 = 0$ составить уравнения двух других сторон. Сделать чертеж.

12. Даны координаты двух вершин треугольника $A(2;-1), B(1;5)$ и точки пересечения его биссектрис $L(3;0)$. Составить уравнения сторон треугольника. Сделать чертеж.

13. Даны две вершины треугольника $A(3;-1)$ и $B(1;4)$ и точка пересечения его медиан $L(0;2)$. Найти координаты третьей вершины треугольника и составить уравнения его сторон. Сделать чертеж.

14. Точки $K(1;3)$ и $L(-1;1)$ являются серединами оснований равнобедренной трапеции. Точка $A(-5;5)$ является одной из вершин трапеции, а точка $Q(-3;5)$ лежит на боковой стороне. Составить уравнения сторон трапеции. Сделать чертеж.

15. Точка $H(-3;2)$ является точкой пересечения высот треугольника, две стороны которого лежат на прямых $u = 2x$ и $u = -x + 3$. Составить уравнение третьей стороны. Сделать чертеж.

16. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит на прямой $2x + y - 2 = 0$, а точка $C(3;-1)$ является вершиной прямого угла. Площадь треугольника равна $9/4$. Составить уравнения прямых, на которых лежат катеты. Сделать чертеж.

Задания к лабораторной работе 2

1. На оси абсцисс найдите точку $C(x,0,0)$, равноудаленную от точек $A(1,2,3)$ и $B(-2,1,3)$.
2. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(1,3,2)$, $B(0,2,4)$, $C(1,1,4)$ и $D(2,2,2)$ является параллелограммом.
3. При каких значениях x и y векторы коллинеарны: 1) $(2,x,3)$ и $(3,2,y)$; 2) $(y,2,5)$ и $(1,-1,x)$.
4. При каком значении x векторы перпендикулярны: 1) $(2,-1,3)$ и $(1,3,x)$; 2) $(x,-2,1)$ и $(x,2x,4)$.
5. Даны точки: $A(0,1,-1)$, $B(1,-1,2)$, $C(3,1,0)$ и $D(2,-3,1)$. Найдите косинус угла между векторами AB и CD .

6. Даны точки $A(1,0,2)$ и $B(-1,1,1)$. Найдите:
- а) координаты единичного вектора, сонаправленного с вектором AB ,
 - б) углы, которые вектор AB составляет с осями координат.

Тема 3. Уравнение прямой.

Уравнение плоскости, взаимное расположение прямой и плоскости.

Контрольные вопросы:

1. Общее уравнение прямой.
2. Уравнение прямой в отрезках. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угол между прямыми.
3. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки на плоскости.
5. Расстояние от точки до прямой.

Задания для самостоятельной работы:

1. Цилиндрические поверхности.
2. Поверхности второго порядка

Практические задания

1. Вычислить угол между прямыми $2x + y - 5 = 0$ и $6x - 2y + 7 = 0$.
2. Составить уравнение медианы BM треугольника ABC , где $A(1,2)$, $B(-1,3)$, $C(3,2)$.
3. Найти уравнение высоты CH треугольника ABC , где $A(1,1)$, $B(1,2)$, $C(2,-1)$.
4. Дана одна из вершин квадрата $A(2,-4)$ и точка пересечения диагоналей $M(5,2)$. Составить уравнения сторон квадрата
5. В треугольнике ABC : $A(4,6)$, $B(-4,1)$, $C(-1,-4)$. Составить уравнения трех его сторон.

Задания к лабораторной работе 3

1. Записать каноническое уравнение прямой
2. Сформулировать условие параллельности прямой и плоскости
3. Записать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки
4. Как вычисляется расстояние от прямой до плоскости

Тема 4. Числовые последовательности.

Контрольные вопросы:

1. 1 и 2 замечательные пределы.
2. Сравнение бесконечно малых.
3. Исследование непрерывности и разрывов функций

Задания для самостоятельной работы:

1. Понятие числовой последовательности и ее предела. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
2. Понятие предела функции в точке. Понятие функции, ограниченной в окрестности точки. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел.
3. Теорема о переходе к пределу в неравенствах.
4. Теорема о пределе промежуточной функции.
5. Понятие непрерывности функции. Доказать непрерывность функции

Практические задания

1. Вычислить пределы числовых последовательностей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}.$$

2. Является ли бесконечно большой при $x \rightarrow 0$ функция $\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$?

3. Пусть $\alpha'(x) \sim \alpha(x)$ и $\beta'(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$. Доказать, что если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ не существует, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ тоже не существует.

4. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt[3]{5n^3 + 4\sqrt[4]{9n^2 + 1}}}{(n + \sqrt{n})\sqrt{7 - n + n^2}}.$$

6. Вычислить пределы числовых последовательностей $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n$.
7. Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя:

$$8. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - \cos ax}{e^{bx} - \cos bx}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cdot \cos x}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{a}{x} \right).$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow a} (a^2 - x^2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right).$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right).$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}.$$

$$32. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}.$$

$$33. \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

Задания к лабораторной работе 4

1. Необходимое и достаточное условие сходимости числовой последовательности к числу a
2. Сформулировать теорему о сжатой последовательности

3. Сформулировать теоремы о конечных пределах и о последовательности
4. Монотонные последовательности
5. Критерий Вейерштрасса о сходимости монотонной последовательности.

Тема 5. Дифференциал функции

Контрольные вопросы:

1. Дифференцирование сложной функции.
2. Дифференциал функции.
3. Производные высших порядков.
4. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически

Задания для самостоятельной работы:

1. Понятие дифференцируемости функции и дифференциала.
2. Условие дифференцируемости. Связь дифференциала.
3. Геометрический смысл дифференциала.
4. Непрерывность дифференцируемой функции.
5. Дифференцирование постоянной и суммы, произведения и частного.
6. Производная сложной функции.
7. Инвариантность формы дифференциала.
8. Производная обратной функции.

Практические задания

1. Найти дифференциал dy $y = x \arcsin(1/x) + \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|, x > 0$.

2. Найти производную.

$$y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}.$$

3. Найти производную.

$$y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}).$$

4. Найти производную.

$$y = \sin \sqrt{3} + \frac{1}{3} \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}.$$

5. Найти производную.

$$y = (\arctg x)^{(1/2) \ln \arctg x}.$$

6. Найти первые производные функций. В заданиях а) и б) дополнительно найти вторые производные.

$$a) y = 3x^5 - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{x};$$

$$e) y = \ln \operatorname{tg}(2x+1);$$

$$б) y = \frac{\sin x}{\cos^2 x};$$

$$ж) y = \frac{x^3}{(x-2)^2};$$

$$в) y = (x+1)^2 \cdot \cos 5x;$$

$$з) y = 2^{3x} + 7x^7 + e^{-x^2};$$

$$з) y = \arctg(e^{2x} + 3);$$

$$и) y = 0,7^{\operatorname{ctg}^2 x};$$

$$д) y = \sqrt{x + \sqrt[3]{x}};$$

$$к) y = x^{\arcsin x}.$$

$$7. \quad a) y = 4x^7 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{2x};$$

$$b) y = \frac{x + e^{3x+2}}{1 + \cos 3x};$$

$$c) y = (x + 2) \cdot e^{-x^2};$$

$$d) y = \sin(3x^7 + 1) + 8x;$$

$$e) y = 2^{\operatorname{tg} x} + 3^{\cos 4x};$$

$$8. \quad a) y = 7x - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3};$$

$$b) y = \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}};$$

$$c) y = 3x \cdot \arcsin 2x;$$

$$d) y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1};$$

$$e) y = 3^{\operatorname{ctg} x} + 8^{\cos 4x};$$

$$9. \quad a) y = 9x^2 + \frac{1}{2x^2} - \sqrt[3]{x};$$

$$b) y = \sqrt[3]{1+x^3};$$

$$c) y = e^{\sin 5x} \cdot \ln x;$$

$$d) y = \ln \sin (2x + 5);$$

$$e) y = 0,9^{\cos^2 x};$$

$$10. \quad a) y = 3x^5 - \frac{1}{x^5} - \sqrt[5]{x};$$

$$b) y = 2\sqrt{4x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^3+x+1}};$$

$$c) y = (\ln x + 1)^2 \cdot \cos 2x;$$

$$d) y = \arcsin \sqrt{1-4x};$$

$$e) y = 5^{\operatorname{tg} x} + 3^{\sin x};$$

$$e) y = x^2 \cdot \cos 7x;$$

$$ж) y = \frac{x^2}{(x+1)^2};$$

$$з) y = \ln^5 \sin x;$$

$$u) y = \arcsin e^{4x};$$

$$к) y = (\sin 2x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$e) y = \sin^4 x + \cos^4 x;$$

$$ж) y = \ln \frac{x^2}{1-x^2};$$

$$з) y = (x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x};$$

$$u) y = \sin(x+6) - x \cdot \cos 4x;$$

$$к) y = (x^2)^{\frac{1}{x}}.$$

$$e) y = x \cdot \operatorname{arctg} 3x;$$

$$ж) y = \frac{9-x^2}{9+x^2};$$

$$з) y = 3 \sin^2 x \cdot \cos 2x;$$

$$u) y = e^{-x^2} + x^2 + \frac{3}{x};$$

$$к) y = x^{\arccos x}.$$

$$e) y = x\sqrt{1+x^2};$$

$$ж) y = \frac{1+e^x}{1-e^x};$$

$$з) y = \sin^2 2x + \cos x;$$

$$u) y = \ln \operatorname{tg} 5x;$$

$$к) y = (x+1)^{2x}.$$

$$13. \quad a) y = 2x^7 - \frac{1}{7x^7} - \sqrt[7]{2x};$$

$$b) y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$$

$$e) y = (3 - \sin^2 x)^3;$$

$$z) y = \frac{1 + \cos 2x}{x^3} + \sin(3x + 9);$$

$$d) y = e^{\sqrt{2x}} + 3;$$

$$14 \quad a) y = 3x^7 - \frac{1}{x^7} - \sqrt[7]{3x};$$

$$b) y = \sqrt{3 - 4x + 5x^2} + 4x \cdot \ln x;$$

$$e) y = \arcsin(3x^2 + 2);$$

$$z) y = \frac{\sin^2 x}{2 + \cos^2 x};$$

$$d) y = 3^{\sin^2 x};$$

$$15. \quad a) y = 4x^9 - \frac{4}{x^9} - \sqrt[9]{4x};$$

$$b) y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{x + 3}};$$

$$e) y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1 - x^2};$$

$$z) y = x \cdot \arccos \sqrt{4 - x^2};$$

$$d) y = 0,2^{\operatorname{ctg}^2 x};$$

$$16. \quad a) y = 15x^3 - \frac{15}{x^3} + \sqrt[3]{x^2};$$

$$b) y = \sqrt{1 + \ln^2 x};$$

$$e) y = \frac{\cos 3x + 4}{\sin 3x - 4};$$

$$z) y = \operatorname{tg}^2 \sqrt{x + 5} + 8x + 7;$$

$$d) y = (x + x^2)^x;$$

$$17. a) y = 5x^{10} + \frac{5}{x^{10}} + \sqrt[10]{5x};$$

$$e) y = \operatorname{arctg} x^2 + 7x^6 + 2;$$

$$\mathcal{H}) y = \frac{x^2}{x^3 - 1};$$

$$z) y = x^2 \cdot \ln(x^2 + 1);$$

$$u) y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + 5\sqrt[5]{x^3 + 1};$$

$$\kappa) y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$e) y = \frac{5 + \sin 5x}{4 - \cos 2x};$$

$$\mathcal{H}) y = (x^2 + 1) \cdot \operatorname{arctg} 4x;$$

$$z) y = (2x + 5) \cdot e^{-x^5};$$

$$u) y = \ln \sqrt{x + 1};$$

$$\kappa) y = (\cos x)^{\sqrt{x}}.$$

$$e) y = e^x \cdot \cos x;$$

$$\mathcal{H}) y = 3x^2 \cdot \ln x^3;$$

$$z) y = \frac{3 + \sin 2x}{9 - e^{2x}};$$

$$u) y = (2x + 2 \cos x) \cdot e^{-x};$$

$$\kappa) y = (\sin 2x)^{\cos x}.$$

$$e) y = e^{\sin 4x + 8};$$

$$\mathcal{H}) y = \frac{x}{x - 1} - \ln 4x;$$

$$z) y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$u) y = \cos^{100} x + \sin 100x;$$

$$\kappa) y = 3^{\arccos 3x}.$$

$$e) y = \sin x \cdot \cos(7x + 5);$$

- $\delta) y = \sqrt{1 + \cos^2 x^2};$
 $\epsilon) y = x^2 \cdot \sqrt{1 - x^2};$
 $\zeta) y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}};$
 $\eta) y = 5^{\sin x^3};$
18. $a) y = 3x^{11} + \frac{5}{x^{11}} + \sqrt[11]{x^3};$
 $\delta) y = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2;$
 $\epsilon) y = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}};$
 $\zeta) y = \operatorname{arctg}(\ln x) + \ln(\sin x);$
 $\eta) y = 2 \cdot \cos(4x + x^2);$
19. $a) y = 12x^7 - \frac{12}{x^7} + \sqrt[7]{x^2};$
 $\delta) y = x^2 \cdot \arccos \frac{x}{2} - 4x;$
 $\epsilon) y = \frac{x^5}{x^4 + 2};$
 $\zeta) y = \operatorname{arctg}^2 x + 6x^2;$
 $\eta) y = 5^{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + 7^{\cos 4x};$
20. $a) y = 6x^7 + \frac{7}{x^6} + \sqrt[6]{x^5};$
 $\delta) y = \sqrt[3]{2 - x^2} \cdot \sqrt{x};$
 $\epsilon) y = \frac{x^6}{6x^5 - 1};$
 $\zeta) y = \ln^3 \sin(3x + 3);$
 $\eta) y = 2^{\operatorname{tg} 3x};$
21. $a) y = 12x^{14} + \frac{14}{x^2} - \sqrt[12]{x};$
 $\delta) y = \sqrt[3]{x^2 + 3x};$
 $\epsilon) y = \frac{x}{x^2 + 2};$
- $\mathcal{H}) y = (e^{\cos x} + 3)^2;$
 $3) y = \ln \sin(3x + 5);$
 $u) y = \frac{x^3}{x^2 - 1};$
 $\kappa) y = (x^3)^{\ln x}.$
- $e) y = (1 - x^2) \cdot \cos 2x;$
 $\mathcal{H}) y = \sqrt[3]{x + x\sqrt{x}};$
 $3) y = e^{-x} \cdot \sin 2x;$
 $u) y = \ln^5(x^2 - 1);$
 $\kappa) y = (\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$
- $e) y = e^{\operatorname{ctg} 3x};$
 $\mathcal{H}) y = \sqrt[4]{1 + \cos x^4};$
 $3) y = \frac{4 + \cos 3x}{\sin(5x + 3)};$
 $u) y = (x^3 + x^2) \cdot e^{-x};$
 $\kappa) y = x^{\arcsin^2 x}.$
- $e) y = \ln(x^2 + 5);$
 $\mathcal{H}) y = x^5 \cdot e^{-x};$
 $3) y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}};$
 $u) y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x};$
 $\kappa) y = (\sqrt{x})^{\sin x}.$
- $e) y = 8x \cdot e^{-x^2};$
 $\mathcal{H}) y = (3x + 1)^5 \cdot \cos 3x;$
 $3) y = \frac{\sin x}{3\cos^2 x};$

- $\varepsilon) y = \ln(2x^3 + 3x^2);$
 $\partial) y = 5^{\frac{x}{x+1}};$
 22. $a) y = x^{15} + \frac{15}{x^2} - \sqrt{x};$
 $\partial) y = (5x + x^3) \cdot \ln x^2;$
 $\varepsilon) y = \frac{x \cdot \cos x}{1 - \sin x} + 2 \sin 4x + 4;$
 $\varepsilon) y = \arccos \frac{1}{2x^2};$
 $\partial) y = 0,7^{\arctg x};$
 23. $a) y = 2x^5 + \frac{5}{x^2} - \sqrt[5]{2x};$
 $\partial) y = \sqrt[3]{\cos^2 x + x^2};$
 $\varepsilon) y = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}};$
 $\varepsilon) y = x \cdot \arccos x - \sqrt{2-x^3};$
 $\partial) y = 7^{\ln^2 x};$
 24. $a) y = x^7 + \frac{7}{x^3} - \sqrt[3]{7x};$
 $\partial) y = \frac{\sin x}{1 + \ln \sin x};$
 $\varepsilon) y = (5 + x^3)^2 \cdot e^{-x};$
 $\varepsilon) y = 2\sqrt{4x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2 + 5}};$
 $\partial) y = 7^{\sqrt{\cos x}};$
 25. $a) y = x^5 + \frac{5}{x^3} - \sqrt[3]{5x};$
 $\partial) y = \frac{2 \sin 5x}{1 - \cos 3x};$
 $\varepsilon) y = \arcsin(\cos x^2) + x^2;$
 $\varepsilon) y = 2 \operatorname{tg}^3(x^3 + 2);$
- $u) y = \arctg^2 e^x;$
 $\kappa) y = x^{\ln^2 x}.$
 $e) y = \cos(10x + x^3);$
 $\mathcal{H}) y = (1 + \sqrt[3]{x})^3;$
 $\varepsilon) y = \frac{7 - \cos 3x}{5 + \sin 5x};$
 $u) y = \ln(4 + \sin 4x);$
 $\kappa) y = x^{\sin \sqrt{x}}.$
 $e) y = (3x + 2) \cdot \sin 3x;$
 $\mathcal{H}) y = \ln^2 \operatorname{tg} 2x;$
 $\varepsilon) y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x};$
 $u) y = \arcsin(e^{7x});$
 $\kappa) y = (\sin 2x)^x.$
 $e) y = e^x \cdot \sin 2x;$
 $\mathcal{H}) y = \arctg \sqrt{\frac{3-x}{x-2}};$
 $\varepsilon) y = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}};$
 $u) y = \cos(3^x);$
 $\kappa) y = (\arcsin x)^{(x^2)}.$
 $e) y = (x^2 + 6) \cdot \ln 3x;$
 $\mathcal{H}) y = \frac{x^2}{1-x} + \frac{9x+8}{x^3};$
 $\varepsilon) y = e^{3x} \cdot \cos 3x;$
 $u) y = \arctg^2 \frac{1}{x};$

- $\partial) y = 2^{\sin 3x};$
 26. $a) y = 7x^2 + \frac{x^5}{5} - \sqrt[5]{x};$
 $\partial) y = \ln \operatorname{ctg}^3 x;$
 $\theta) y = \frac{x^7}{x^5 - 2};$
 $\varepsilon) y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x + 2);$
 $\partial) y = 2^{\frac{x}{1+x}} + 7^{\cos 2x};$
 27. $a) y = x^7 - \frac{x^6}{6} + \sqrt[6]{x};$
 $\partial) y = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x};$
 $\theta) y = 3x \cdot \sin^3 x - \cos^3 x;$
 $\varepsilon) y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}};$
 $\partial) y = \ln^2 \sin 3x;$
 28. $a) y = x^5 - \frac{1}{x^5} + \sqrt[5]{x};$
 $\partial) y = \sqrt{x+2} \sqrt{x};$
 $\theta) y = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} + 5^{\cos 4x};$
 $\varepsilon) y = \operatorname{arctg}(7 \sin 3x);$
 $\partial) y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1};$
 29. $a) y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3} + 2;$
 $\partial) y = \operatorname{tg}(x^2 + 3);$
 $\theta) y = x^{\cos^2 x};$
 $\varepsilon) y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right);$
 $\partial) y = x^2 \cdot \arcsin(9x + 2);$
 $\kappa) y = (x+1)^{(x^2)}.$
 $e) y = \sin^2 6x + 3x^2;$
 $\mathcal{H}) y = \sqrt{3x} \cdot \arcsin x^2;$
 $3) y = \frac{1+e^{2x}}{1-e^{4x}};$
 $u) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2x + 3});$
 $\kappa) y = (\sin \sqrt{x})^x.$
 $e) y = 2 \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{2};$
 $\mathcal{H}) y = \frac{x}{6(x+1)};$
 $3) y = \arcsin(e^{-4x});$
 $u) y = 5^{\frac{1-x}{1+x}} + 3^{\cos 4x};$
 $\kappa) y = (3x)^{e^x}.$
 $e) y = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2+6x}{x^3};$
 $\mathcal{H}) y = \ln^2 \operatorname{arctg} x;$
 $3) y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right);$
 $u) y = (\sqrt{x})^{\cos x};$
 $\kappa) y = \frac{x^2}{1+x^3}.$
 $e) y = \frac{1+2 \cos 3x}{1-\cos 2x};$
 $\mathcal{H}) y = (0,9)^{\sqrt{x}};$
 $3) y = \sin^3 \frac{x}{3} + \cos x;$
 $u) y = 0,7^{(x^5)};$
 $\kappa) y = x\sqrt{x} \cdot (3 \ln x - 2).$

$$30.a) y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + 3;$$

$$\delta) y = \sqrt{2x - \sin 2x};$$

$$\theta) y = \sin^4 x + x^2 \cdot \cos^2 x;$$

$$z) y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}};$$

$$\partial) y = 5^{\cos x^2};$$

$$31. a) y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + 1;$$

$$\delta) y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x};$$

$$\theta) y = \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{arctg} x;$$

$$z) y = (x^2 - x^3) \cdot e^{-x};$$

$$\partial) y = 15^{\ln^2 x};$$

$$e) y = e^{-x^2};$$

$$\kappa) y = 3 \operatorname{tg}^6 x + 7;$$

$$3) y = 4x \cdot \operatorname{arctg} (2x + 9);$$

$$u) y = \frac{x^2}{(x-3)^2};$$

$$\kappa) y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\arccos x}.$$

$$e) y = \operatorname{tg} (x^2 + \cos x);$$

$$\kappa) y = \sqrt{\frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}};$$

$$3) y = \frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2} + \arcsin x);$$

$$u) y = 3x^3 + \ln^3 x;$$

$$\kappa) y = (\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} x}.$$

$$32. \quad a) y = 3x^5 - \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4} + 2 ;$$

$$б) y = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x;$$

$$в) y = x^3 \cdot (x - 5 \cos x)^2$$

$$г) y = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt[3]{x}};$$

$$д) y = 5^{\sin 3x};$$

$$4x^2 - \frac{3}{2x^2} + \sqrt[3]{x};$$

$$е) y = \frac{2 + e^{3x}}{9 - e^{-4x}} \cdot x^2;$$

$$ж) y = \operatorname{arctg}(x^2 + e^{3x});$$

$$з) y = \ln \operatorname{tg}(5x+1);$$

$$и) y = 3^{\ln 3x};$$

$$34. \quad a) y = 3x^5 - \frac{5}{x^5} + \sqrt[5]{5x+2};$$

$$б) y = \arcsin(3x^3 + 4);$$

$$в) y = (x + 8) \cdot \operatorname{arctg} 4x^3;$$

$$г) y = \frac{2x^3 + 3x^2}{3x};$$

$$д) y = 4x \cdot (1 - 3 \ln x);$$

$$35. \quad a) y = 5x - \frac{1}{x^2} - \sqrt[5]{x};$$

$$б) y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x};$$

$$в) y = \sqrt[3]{(4+3x)^2};$$

$$г) y = x^2 \cdot \operatorname{ctg} 2x;$$

$$д) y = \cos^2 5x + 7x;$$

$$36. \quad a) y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \sqrt[3]{x};$$

$$е) y = \sqrt{1+x^2} + 5^{\cos 3x};$$

$$ж) y = \ln^2 \sin x;$$

$$з) y = \arccos \frac{9-x^2}{9+x^2};$$

$$и) y = (1+9x) \cdot e^{-x^2};$$

$$к) y = (1+x)^{\cos x}. 33. \quad a) y =$$

$$е) y = \ln(2x-3);$$

$$ж) y = \frac{3 + \sin 4x}{8 - \cos 3x};$$

$$з) y = (2x^3 + 5)^4 \cdot x^3;$$

$$и) y = \sin 5x + \cos 3x^3;$$

$$к) y = x^{\frac{2}{x}}.$$

$$е) y = \frac{5x + \sin 4x}{\cos 2x - 4};$$

$$ж) y = \ln \cos(5x^3 + 4);$$

$$з) y = (\operatorname{ctg} 3x + 1)^5;$$

$$и) y = 5^{\sin 2x};$$

$$к) y = (\cos x)^x.$$

$$е) y = \cos^2 x - 2 \ln \cos x;$$

$$ж) y = \frac{1}{(1 + \sin 4x)^3};$$

$$з) y = \arcsin^2 \frac{1}{x};$$

$$и) y = 7^{-x^2};$$

$$к) y = (\cos x)^{\sin x}.$$

$$е) y = \operatorname{arctg} \sqrt{4x^2 - 1};$$

$$\begin{array}{ll}
\text{б)} y = \frac{2}{2x^2} + 2; & \text{жс)} y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}; \\
\text{в)} y = (x+5)^7 \cdot \sin 3x; & \text{з)} y = (x+1) \cdot \arccos(x^2+1); \\
\text{е)} y = \sin^3 x + \cos^3 x; & \text{и)} y = \ln \frac{x^5}{x^5-2}; \\
\text{д)} y = 52^{\operatorname{ctg} x}; & \text{к)} y = (\operatorname{tg} x)^x. \\
37. \text{ а)} y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + 3; & \text{е)} y = \left(\frac{\sin x}{1+\cos 2x} \right)^2; \\
\text{б)} y = 3x \cdot \sin 5x + 8; & \text{жс)} y = x \cdot (\cos \ln x + \sin \ln x); \\
\text{в)} y = (3 + \sin x)^2 \cdot x; & \text{з)} y = 2(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{3}}); \\
\text{е)} y = \frac{3x+2}{x^2-2x+5}; & \text{и)} y = 0,92^{(x^3)}; \\
\text{д)} y = \arcsin \sqrt[3]{x}; & \text{к)} y = (\sqrt{x})^{\operatorname{tg}^2 x}.
\end{array}$$

Задания к лабораторной работе 5

- Исходя из определения производной, доказать, что:
 - производная периодической дифференцируемой функции есть функция периодическая;
 - производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная;
 - производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.
- Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=0$ и $f(0)=0$, то $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.
- Доказать, что производная $f'(0)$ не существует, если

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
- Доказать, что производная от функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
- Доказать приближенную формулу

$$\sqrt{a^2 + z} \approx a + z/(2a), a > 0, |z| \ll a.$$

Тема 6. Частные производные

Контрольные вопросы:

- Правила вычисления производная сложной функции нескольких переменных. Производная неявной функции..
- Частные производные высших порядков

3. Экстремум функции двух переменных.
4. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению
5. Как вычисляется полный дифференциал.

Задания для самостоятельной работы:

1. Гиперболические функции, их производные.
2. Производные высших порядков. Формула Лейбница.
3. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность
4. дифференциалов порядка выше первого.
5. Дифференцирование функций, заданных параметрически.
6. Исходя из определения производной, доказать, что:
7. а) производная периодической дифференцируемой функции есть функция периодическая;
8. б) производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная;
9. в) производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.

Практические задания

1. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2 \sec^2 t. \end{cases}$$

2. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, t_0 = \pi / 3. \end{cases}$$

3. Найти производную y'_x .

$$\begin{cases} x = \frac{3t^2 + 1}{3t^3}, \\ y = \sin(t^3 / 3 + t). \end{cases}$$

4. Найти производную указанного порядка.

$$y = (2x^2 - 7) \ln(x - 1), y^v = ?$$

5. Для функций, заданных параметрически, найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$1. \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = t - \sin 2t. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x = t^3 + 8t, \\ y = t^4 + 2t. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 + \cos t. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = \sin 3t, \\ y = \cos 3t. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x = \cos 3t, \\ y = t - \sin 3t. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin^2 t. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = t + \ln \cos 2t, \\ y = t - \ln \sin 2t. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 2t^2. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

4. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$	14. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$	24. $\begin{cases} x = t + \cos t, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x = t^4 + 1, \\ y = t^2 + t. \end{cases}$	15. $\begin{cases} x = \ln 2t, \\ y = t + t^2. \end{cases}$	25. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x = 5 \sin t - \sin 5t, \\ y = 5 \cos t + \cos 5t. \end{cases}$	16. $\begin{cases} x = e^t (t - \cos t), \\ y = e^t (\sin t - 1). \end{cases}$	26. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t^2 - t}. \end{cases}$	17. $\begin{cases} x = e^t \cos 2t, \\ y = e^t \sin 2t. \end{cases}$	27. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \operatorname{arccost}^2. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x = t^5 - t^3 + 1, \\ y = 4t^4 + t. \end{cases}$	18. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t. \end{cases}$	28. $\begin{cases} x = e^t (t + 1), \\ y = e^t (t - 1). \end{cases}$
9. $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$	19. $\begin{cases} x = t^2 - \sin 2t, \\ y = t - \cos 2t. \end{cases}$	29. $\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t^2 - 1}. \end{cases}$
10. $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1 - t}. \end{cases}$	20. $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 1 + \cos 2t. \end{cases}$	30. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

Задания к лабораторной работе 6

1. В чём смысл частных производных?
2. Найти область определения функции: $z = \arccos(x+y)$
3. Метод множителей Лагранжа
4. Локальные Экстремумы
5. Метод множителей Лагранжа решения задач математического программирования

Тема 7. Неопределенный интеграл

Контрольные вопросы:

1. Понятие неопределенного интеграла. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле.
2. Замена переменной в неопределённом интеграле.
3. Интегрирование тригонометрических выражений.
4. Универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование иррациональных выражений.

Задания для самостоятельной работы:

1. Интегрирование биномиальных дифференциалов.
2. Вычисление площадей плоских фигур.
3. Определение и вычисление длины кривой, дифференциал длины дуги кривой.

4. Считая, что функция $\frac{\sin x}{x}$ равна 1 при $x=0$, доказать, что она интегрируема на отрезке $[0,1]$

Практические задания

1. Найти неопределенные интегралы. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

2. Вычислить неопределённые интегралы.

$$\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$$

3. Найти неопределенные интегралы.

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$$

4. Найти неопределенные интегралы.

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

5. Найти неопределенные интегралы.

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

6. Задачи. Найти неопределенные интегралы.

$$1. \int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx \quad 2. \int \frac{x-2}{x^3} dx \quad 3. \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx \quad 4. \int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx$$

$$5. \int e^x \cdot \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx \quad 6. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx \quad 7. \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \quad 8. \int \frac{x-2}{\sqrt{x^3}} dx$$

$$9. \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx \quad 10. \int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx \quad 11. \int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx \quad 12. \int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx$$

$$13. \int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx \quad 14. \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx \quad 15. \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx \quad 16. \int a^x \cdot \left(1 + \frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx$$

$$17. \int \frac{3 - 2ctg^2 x}{\cos^2 x} dx \quad 18. \int \frac{x^4}{1+x^2} dx \quad 19. \int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2} dx \quad 20. \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx$$

$$21. \int \cos 3x dx \quad 22. \int e^{-3} dx \quad 23. \int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) dx \quad 24. \int (3-2x)^4 dx$$

$$25. \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}} \quad 26. \int \frac{dx}{\cos^2 5x} \quad 27. \int \sqrt{4x-1} \cdot dx \quad 28. \int \sqrt[3]{5-6x} \cdot dx$$

$$29. \int \sin(a-bx) dx \quad 30. \int \frac{2x-5}{x^2-5x+7} dx \quad 31. \int \frac{dx}{1-10x} \quad 32. \int \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$$

$$33. \int \sin^2 x \cdot \cos x dx \quad 34. \int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x} \quad 35. \int \frac{1-2\cos x}{\sin^2 x} dx \quad 36. \int e^{\cos x} \cdot \sin x dx$$

$$37. \int e^{-x^2} x dx \quad 38. \int \sqrt{x^2+1} \cdot x dx \quad 39. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} \quad 40. \int \sqrt{1+4\sin x} \cdot \cos x dx$$

$$\begin{array}{lll}
41. \int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x} & 42. \int \frac{dx}{x(1+\ln x)} & 43. \int \cos^3 x \cdot \sin x dx \quad 44. \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} \\
45. \int \sin x \cdot \cos x dx & 46. \int e^{x^3} \cdot x^2 dx & 47. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad 48. \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx \\
49. \int (e^x + e^{-x})^2 dx & 50. \int \frac{x^2 dx}{1-x^3} &
\end{array}$$

Тема 8. Определенный интеграл

Контрольные вопросы:

1. Формула Ньютона-Лейбница.
2. Интегрирование по частям в определённом интеграле.
3. Замена переменной в определённом интеграле
4. Несобственные интегралы

Задания для самостоятельной работы:

1. Основные свойства определённого интеграла.
2. Теорема о среднем.
3. Производная определённого интеграла по верхнему пределу.

1. $\int_0^4 3x^2 dx$	9. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^2 x dx$
2. $\int_0^{\pi/6} \sin 3x dx$	10. $\int_0^4 x\sqrt{16-x^2} dx$
3. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$	11. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$
4. $\int_0^1 e^{2x} dx$	12. $\int_0^{\pi/6} \cos x \cdot e^{\sin x} dx$
5. $\int_1^2 \frac{dx}{1-2x}$	13. $\int_{-1}^2 x \cdot (x^2-1)^3 dx$
6. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2x dx$	14. $\int_0^{\pi/6} (2-x) \sin 3x dx$
7. $\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x} dx$	15. $\int_0^1 \arcsin x dx$
8. $\int_0^{\pi/2} (x-1) \cos x dx$	16. $\int_0^{\pi} x \sin x dx$

Практические задания

1. Вычислить определенные интегралы $\int_{\pi/2}^{2\arctg 2} \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.
2. Вычислить определенные интегралы $\int_{\pi/4}^{\arctg 3} \frac{dx}{(3\operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}$.
3. Вычислить определенные интегралы. $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx$.

4. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

$$\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases}$$

$$x = 2(x \geq 2).$$

5. Вычислить длины дуг кривых заданных параметрическими уравнениями.

$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi.$$

Задания к лабораторной работе 8

Пусть $f(x)$ -непрерывная периодическая функция с периодом T .

1. Доказать, что

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \forall a.$$

2. Доказать, что если $f(x)$ -четная функция, то

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^+ f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^+ f(x)dx.$$

3. Доказать, что для нечетной функции $f(x)$ справедливы равенства

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_0^+ f(x)dx \text{ и } \int_{-a}^+ f(x)dx = 0.$$

4. Чему равен интеграл $\int_{-1}^{+1} \sin^2 x \ln \frac{2+x}{2-x} dx$?

5. При каком условии, связывающем коэффициенты a, b, c , интеграл

6. $\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$ является функцией?

7. При каких целых значениях n интеграл $\int \sqrt{1+x^n} dx$ выражается элементарными функциями?

Тема 9. Комплексные числа

Контрольные вопросы:

1. Какие числа называются комплексными?
2. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
3. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом
4. Арифметические операции над комплексными числами в алгебраической форме.
5. Тригонометрическая форма комплексного числа

Задания для самостоятельной работы:

1. Что называется действительной и мнимой частью комплексного числа?
2. Что называется модулем и аргументом комплексного числа?
3. Какие формы записи комплексных чисел вы знаете?
4. В каком случае два комплексных числа называются сопряженными?

5. По каким правилам производятся действия над комплексными числами?

Практические задания 9

1. Вычислить $(1+i)^{10}$. Запишем число $z=1+i$ в тригонометрическом виде
2. Вычислить $\sqrt[3]{i}$. Запишем число в тригонометрической форме:
3. Найти $(3+5i)(3-i)$
4. Привести к тригонометрическому виду $1+i$.

1. Вычислить:

- 1) $(3-2i) + (5+3i)$;
- 2) $(1+2i) - (3-i)$;
- 3) $3(2-i) \cdot (1-i)$;
- 4) $(1+3i)(-7+2i)$;
- 5) $(2-i)^2$;
- 6) $(1+2i)^3$.

2. Найти решение уравнений ($x, y \in \mathbf{R}$):

- 1) $(1+i)x + (2+i)y = 5+3i$;
- 2) $2x + (1+i)(x+y) = 7+i$;
- 3) $(3-y+x)(1+i) + (x-y)(2+i) = 6-3i$.

3. Вычислить:

- 1) i^{13} ;
- 2) i^{65} ;
- 3) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$;
- 4) $\frac{5}{1+2i}$;
- 5) $\frac{2i-3}{1+i}$;
- 6) $\frac{2+3i}{i}$;
- 7) $\frac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$;
- 8) $\frac{2+i}{2-i} - (3+4i) + \frac{4-i}{3+2i}$;
- 9) $(2-i)^2$.

4. Найти z^{-1} , если:

- 1) $z = 7-12i$;
- 2) $z = 3+4i$;
- 3) $z = -3+7i$;
- 4) $z = i$.

5. Вычислить:

- 1) $(1+i\sqrt{3})^3(1-i)^7$;
- 2) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$;
- 3) $\frac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}$.

6. Доказать, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; $\overline{-z_1} = -\overline{z_1}$.

7. Доказать, что если $z = a+bi$, то $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2}$.

8. Построить точки, соответствующие комплексным числам:

$$-1; i; -\sqrt{2}; -3i; 2-3i; -4-2i; 3+i; -6+2i; 2+2i; -2+2i; -2-2i.$$

9. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел, изобразить геометрически данные числа и результаты действий.

$$1) z_1 = -2 + i, \quad z_2 = 3 - i; \quad 2) z_1 = -3, \quad z_2 = 4i.$$

10. Изобразить геометрическое множество всех комплексных чисел $z = x + yi$, для которых:

$$1) x = 2; 2) 1 \leq x \leq 3; \quad 3) \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z; \quad 4) \operatorname{Im} z = 2\operatorname{Re} z.$$

11. Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел и представить их на комплексной плоскости:

$$1) z = 1 + i; \quad 2) z = \sqrt{3} - i; \quad 3) z = \sqrt{2}i; \quad 4) z = 2; \quad 5) z = -i.$$

12. Указать на комплексной плоскости множества точек, соответствующие комплексным числам z , удовлетворяющие условиям:

$$1) |z| = 1; \quad 2) |z| \leq 5; \quad 3) 1 \leq |z| \leq 2; \quad 4) \arg z = 0;$$

$$5) \frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}; \quad 6) |z - 1| = \frac{1}{3}; \quad 7) |z - 3 + 2i| \leq 2.$$

13. Представить следующие комплексные числа в тригонометрическом виде:

$$1) 1, -1, i, -i;$$

$$2) z = 3 - 3i;$$

$$3) z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}i}{2}.$$

15. Даны числа

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}, \quad z_2 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}, \quad z_3 = \cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24}.$$

Вычислить: 1) $z_1 z_2 z_3$; 2) $\frac{z_1}{z_2 z_3}$; 3) $\frac{z_1 z_2}{z_3}$; 4) $\frac{z_1 z_3}{z_2}$.

$$17. \text{ Вычислить } |z| \text{ и } \arg z, \text{ если } z = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}.$$

$$18. \text{ Упростить выражение } \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi}.$$

21. Вычислить корни и результат изобразить на комплексной плоскости.

$$1) \sqrt[4]{1}; \quad 2) \sqrt[4]{i}; \quad 3) \sqrt[3]{-1+i}.$$

22. Выразить в радикалах корни из единицы степени 2, 3, 4, 6, 8.

23. Представить в показательной форме комплексные числа:

$$1) -1 - i; \quad 2) \sqrt[3]{i}; \quad 3) \sqrt[3]{-1+i}.$$

24. Найти тригонометрическую и алгебраическую форму для чисел:

1) $z = 2e^{\frac{\pi i}{4}}$; 2) $z = 4e^{\frac{\pi i}{2}}$; 3) $z = 3e^{\pi i}$; 4) $z = e^i$.

25. Найти $z_1 z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$, результат написать в алгебраической форме.

1) $z_1 = 1,5e^{0,7i}$; $z_2 = 0,7e^{1,7i}$,

2) $z_1 = e^{-0,7+3i}$; $z_2 = e^{1,5+2i}$.

26. Вычислить z^6 и $\sqrt[4]{z}$, результаты представить в алгебраической форме и изобразить их на плоскости.

1) $z = 4,2e^{2,3i}$; 2) $z = 0,4^{\pi i}$; 3) $z = 3,5e^{5i}$; 4) $z = -16$.

27. Решить уравнения на множестве комплексных чисел и разложить многочлен на множители:

1. $x^2 + x + 1 = 0$.

2. $x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0$.

3. $x^2 + 3x + 4 = 0$.

4. $x^3 - 27 = 0$.

5. $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$.

6. $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0$.

7. $x^3 - 6x + 9 = 0$.

8. $x^3 + 6x + 2 = 0$.

9. $x^3 + 24x - 56 = 0$.

10. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

11. $x^3 + 9x - 26 = 0$.

12. $x^3 - 4x + 2 = 0$.

13. $x^3 + 18x + 15 = 0$.

14. $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$.

15. $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$.

Задания к лабораторной работе 9

1. Приведите примеры комплексных чисел и действий над ними, результат которых есть действительное число.

2. Какие корни и сколько корней имеет квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом?

3. Как геометрически интерпретируются комплексные числа?

4. Что можно сказать о модулях двух сопряженных комплексных чисел?

5. Что называется аргументом комплексного числа? Всякое ли комплексное число имеет аргумент

Тема 10. Решение дифференциальных уравнений

Контрольные вопросы:

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
2. Однородные и линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.
3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Задания для самостоятельной работы:

1. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, укажите метод его решения.
2. Дайте определение однородного и линейного дифференциальных уравнений. Изложите методы нахождения их общего и частного решений.
3. Выведите формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
4. Докажите теорему об общем решении неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

Практические задания

1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными $xydx + (x+1)dy = 0$
2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения первого порядка. $y' = \frac{8x+5y}{5x-2y}$
3. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего начальному условию $(\cos^2 x)y' + y = \operatorname{tg} x$; $y(0) = -1$;
4. Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее начальным условиям.
 $y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 5$.
5. Задачи.

Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1. $y'' - 4y' + 3y = 0$ | 6. $y'' + 8y' + 16y = 0$ |
| 2. $y'' - 2y' - 8y = 0$ | 7. $y'' - 4y' + 13y = 0$ |
| 3. $y'' + 3y' + 2y = 0$ | 8. $y'' + 6y' + 25y = 0$ |
| 4. $y'' - 4y' = 0$ | 9. $y'' + 9y = 0$ |
| 5. $y'' - 2y' + y = 0$ | 10. $y'' - 16y = 0$ |

6. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка

1. $2y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

$$2. y'' + 4y = 0, \quad y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$3. y'' - 6y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 6$$

$$4. 9y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{9}$$

$$5. y'' - 12y' + 37y = 0, \quad y(2\pi) = 1, \quad y'(2\pi) = 6$$

Задания к лабораторной работе 10

1. Дайте определение однородного и линейного дифференциальных уравнений. Изложите методы нахождения их общего и частного решений.
2. Выведите формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
3. Докажите теорему об общем решении неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
4. Изложите правило для нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

2.2 Критерии оценки качества освоения дисциплины

Качество освоения дисциплины оценивается по степени успешности ответов на семинарских занятиях, качества выполнения практических заданий, лабораторных практикумов и результатов ответов на предложенные по темам вопросы.

Алгоритм оценивания ответов на семинарских занятиях таков. Развернутый ответ студента должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на заданную тему.

Критерии оценивания:

- 1) полноту и правильность ответа;
- 2) степень осознанности, понимания изученного;
- 3) языковое оформление ответа.

Оценка **«Отлично»** ставится, если:

- 1) студент полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только из учебника, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.

«Хорошо» – студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для отметки «5», но допускает 1–2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1–2 недочета в последовательности и языковом оформлении излагаемого.

«Удовлетворительно» – студент обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.

Оценка «Неудовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает незнание большей части соответствующего вопроса, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал. Оценка «Неудовлетворительно» отмечает такие недостатки в подготовке, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующими знаниями и умениями.

Критерии оценки знаний обучающихся при выполнении лабораторных практикумов:

Оценка «5» ставится в том случае, если:

- лабораторная работа подготовлена к выполнению, обучаемый знает цель лабораторной работы;
- задания решены без ошибок с первого раза, правильно выбраны решения заданий;
- правильно выполнены расчёты, обучающийся понимает, что они значат;
- полно даны ответы на письменные и устные контрольные вопросы;
- отчёт оформлен аккуратно, сделаны выводы.

Оценка «4» ставится в том случае, если

- лабораторная работа подготовлена к выполнению, обучаемый знает цель практической и лабораторной работы;
- задания решены с ошибками, потребовалась дополнительная помощь преподавателя, правильно выбраны методики решения заданий;
- расчёты выполнены с консультацией преподавателя;
- полно даны ответы на письменные и устные контрольные вопросы;
- отчёт оформлен аккуратно, сделаны выводы.

Оценка «3» ставится в том случае, если

- лабораторная работа подготовлена к выполнению, обучаемый знает цель лабораторной работы;
- задания выполнены с ошибками, потребовалась дополнительная помощь преподавателя, правильно выбраны методики решения заданий;
- с ошибками выполнены расчёты, даже с консультацией преподавателя или обучающийся не может объяснить, как выполнялись расчеты;
- даны ответы на письменные и устные контрольные вопросы.
- отчёт оформлен небрежно, сделаны выводы.

Оценка «2» ставится в том случае, если

- лабораторная работа подготовлена к выполнению, обучаемый не знает цель лабораторной работы;
- задачи решены с ошибками, потребовалась дополнительная помощь преподавателя, неверно выбраны методы решения задач;
- не выполнены расчёты;
- не даны ответы на устные контрольные вопросы;
- отчёт оформлен небрежно, выводы не сделаны.

Критерии оценки знаний обучающихся при выполнении практических заданий:

Оценка «отлично» – ставится, если студент демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, определяет взаимосвязи между показателями задачи, даёт правильный алгоритм решения, определяет междисциплинарные связи по условию задания. А также, если студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий используемых в работе, смог ответить на все уточняющие и дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» – ставится, если студент демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, допуская незначительные неточности при решении задач, имея неполное понимание междисциплинарных связей при правильном выборе алгоритма решения задания. А также, если студент показал знание учебного материала, усвоил основную литературу, смог ответить почти полно на все заданные дополнительные и уточняющие вопросы.

Оценка «удовлетворительно» – ставится, если студент затрудняется с правильной оценкой предложенной задачи, дает неполный ответ, требующий наводящих вопросов преподавателя, выбор алгоритма решения задачи возможен при наводящих вопросах преподавателя. А также, если студент в целом освоил материал практической работы, ответил не на все уточняющие и дополнительные вопросы.

Оценка «неудовлетворительно» – ставится, если студент дает неверную оценку ситуации, неправильно выбирает алгоритм действий. А также, если он имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практической работы, который полностью не раскрыл содержание вопросов, не смог ответить на уточняющие и дополнительные вопросы.

3. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

3.1 Теоретические вопросы для проведения экзамен

1. Матрицы. Основные операции над матрицами.
2. Определитель квадратной матрицы, свойства определителей.
3. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы.
4. Системы линейных уравнений. Теорема Крамера.
5. Метод Гаусса.
6. Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
7. Линейные преобразования. Собственные векторы и собственные значения матрицы.
8. Векторы. Модуль вектора. Направляющие косинусы.
9. Коллинеарность и компланарность векторов. Операции над векторами.
10. Проекция вектора, свойства проекций.
11. Ортонормированный базис. Скалярное произведение двух векторов. Векторное произведение двух векторов. Смешанное произведение трёх векторов.
12. N-мерное векторное пространство.
13. Преобразования декартовых координат. Полярные координаты. Уравнения линии на плоскости.
14. Прямая на плоскости. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой в отрезках.
15. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
16. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки на плоскости. Расстояние от точки до прямой.
17. Кривые второго порядка.
18. Общее уравнение плоскости в пространстве. Неполные уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках.
19. Уравнение плоскости, проходящей через три точки в пространстве. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.

20. Общие уравнения прямой в пространстве. Каноническое уравнение прямой в пространстве.
21. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки в пространстве. Взаимное положение прямой и плоскости.
22. Цилиндрические поверхности. Поверхности второго порядка и их исследование методом сечений.
23. Понятие множества. Операции с множествами.
24. Множества натуральных, целых, рациональных, иррациональных, вещественных чисел. Числовая ось, промежутки. Окрестность точки. Модуль вещественного числа и его свойства.
25. Функция и её график. Основные свойства функций. Сложная функция. Обратная функция. Обратные тригонометрические функции.
26. Основные элементарные функции и их графики. Неэлементарные функции: $\text{sign } x$, $\text{entier } x$.
27. Числовые последовательности. Предел последовательности и его свойства.
28. Неопределённости и их раскрытие. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.
29. Теорема Вейерштрасса о монотонных последовательностях. Число e . Экспонента. Натуральные логарифмы.
30. Предел функции. Предел функции на бесконечности. Бесконечные пределы. Односторонние пределы.
31. Замечательные пределы.
32. Сравнение бесконечно малых. Вычисление пределов функций с использованием эквивалентных бесконечно малых.
33. Непрерывные и разрывные функции. Классификация точек разрыва. Теоремы Больцано-Коши и Вейерштрасса.
34. Производная функции. Физический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной.
35. Дифференцируемость функции. Арифметические свойства производной. Производная обратной функции.
36. Производные основных элементарных функций.
37. Дифференцирование сложной функции. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Свойства дифференциала.
38. Производные высших порядков.
39. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически.
40. Теоремы Ферма, Ролля, Коши, Лагранжа. Правило Лопиталя.
41. Критерий постоянства функции на промежутке. Исследование функций на монотонность и экстремумы. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
42. Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба.
43. Асимптоты кривой. Схема исследования функции.
44. Понятие функции нескольких переменных. График функции двух переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
45. Частные производные. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Полный дифференциал.
46. Производная сложной функции нескольких переменных. Производная неявной функции.
47. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
48. Частные производные высших порядков.
49. Экстремум функции двух переменных.
50. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению, градиент.
51. Метод наименьших квадратов.

52. Первообразная функция и неопределённый интеграл. Свойства неопределённого интеграла.
53. Таблица неопределённых интегралов. Методы непосредственного интегрирования.
54. Интегрирование по частям.
55. Замена переменной в неопределённом интеграле.
56. Интегрирование тригонометрических и иррациональных выражений.
57. Интегральная сумма. Определённый интеграл. Геометрический смысл определённого интеграла.
58. Свойства определённого интеграла. Теорема о среднем.
59. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
60. Интегрирование по частям и замена переменной в определённом интеграле.
61. Приложения определённого интеграла: вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной и полярной системах координат, длина дуги кривой, вычисление объёма тела по площадям поперечных сечений, объём тела вращения.
62. Несобственный интеграл I рода (по бесконечному промежутку).
63. Несобственный интеграл II рода (от неограниченной функции).
64. Арифметические операции над комплексными числами. Комплексная плоскость.
65. Формула Эйлера. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Формула Муавра.
66. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.
67. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Общее и частное решение, общий и частный интеграл. Интегральная кривая. Особое решение. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
68. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
69. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.
70. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.
71. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.
72. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Свойство линейной комбинации решений.
73. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения.
74. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.
75. Метод неопределённых коэффициентов.
76. Метод вариации произвольной постоянной.
77. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.
78. Системы дифференциальных уравнений.

3.2 Показатели, критерии и шкала оценивания письменных ответов на экзамене:

Критерии оценивания	Показатели и шкала оценивания			
	5	4	3	2

полнота и правильность ответа	обучающийся полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий	Обучающийся достаточно полно излагает материал, однако допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1-2 недочета в последовательности и в языковом оформлении излагаемого	обучающийся демонстрирует знание и понимание основных положений данной темы, но излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или	обучающийся демонстрирует незнание большей части соответствующего вопроса
степень осознанности, понимания изученного	демонстрирует понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только из учебника, но и самостоятельно	присутствуют 1-2 недочета в обосновании своих суждений, количество приводимых примеров ограничено	не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры	допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл
языковое оформление ответа	излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка	излагает материал последовательно, с 2-3 ошибками в языковом оформлении	излагает материал непоследовательно и допускает много ошибок в языковом оформлении	беспорядочно и неуверенно излагает материал