Федеральное агентство морского и речного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОРСКОГО И РЕЧНОГО ФЛОТА
имени адмирала С. О. МАКАРОВА
Воронежский филиал ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени
адмирала С.О. Макарова**

*Кафедра математики, информационных систем
и технологий*

Р.В. Кузьменко

Численные методы.
Практикум по выполнению лабораторных работ.

Для студентов, обучающихся по направлению
09.03.02 – «Информационные системы и технологии»
всех форм обучения

**ВОРОНЕЖ
2023**

Численные методы. Практикум по выполнению лабораторных работ/ сост.: Кузьменко Р.В. – Воронеж: «ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова». - 2023. – 96 с.

Практикум по выполнению лабораторных по дисциплине «Численные методы» разработан в соответствии с требованиями ФГОС ВО (3++) по направлению подготовки 09.03.02 – «Информационные системы и технологии» и рабочей программы дисциплины. Практикум предназначен для формирования знаний и умений у студентов по дисциплине и организации самостоятельной работы обучающихся.

Практикум содержит примеры выполнения типовых заданий в табличном процессоре Excel.

Практикум утвержден на заседании кафедры математики, информационных систем и технологий Воронежского филиала ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова» 29.06.2023 г., протокол № 10.

Содержание

Введение

Характерной чертой современного этапа развития науки и техники является широкое применение методов вычислительной математики во всех областях человеческой деятельности. Без знания численных методов невозможно рассчитать сложные электрические цепи, провести статистическую оценку параметров выборки, вычислить "не берущиеся" интегралы, решит многие дифференциальные уравнения и т.п. Даже используя такую "простую" программу, как "Калькулятор", мы, не осознавая этого, вновь пользуемся заложенными в нее алгоритмами вычислительной математики.

Целью курса "Численные метогды" является овладение студентами разнообразными численными методами, используемыми при решении различных, наиболее типовых прикладных задач профессиональной деятельности. Обычно в задачи курса, также нашедшие отражение в данном практикуме, включают овладение методами расчета значения функции с помощью рядов, интерполяции и аппроксимации, решения систем линейных алгебраических уравнений, нахождения корней нелинейных уравнений, решения систем нелинейных алгебраических уравнений, численного интегрирования и дифференцирования. Однако, естественно, нельзя будет утверждать, что данный практикум может хоть как-то претендовать на какое-то завершенное представление столь обширной области, как вычислительная математика. Например, в практикуме не рассмотрены такие важные разделы. как численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, интерполяция сплайнами, итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений и многие другие. Поэтому на этом месте автор хотел бы еще раз подчеркнуть, что целями данного практикума, в первую очередь, являются овладение обучающимися наиболее часто используемыми методами вычислительной математики и одновременное развитие у них навыков применения компьютерной техники для их реализации.

Основной подход, лежащий в основе предлагаемых в практикуме способов решения задач на практических занятиях, заключается в использовании, в первую очередь, численных моделей и методов, наиболее удобных для программирования и нахождения их решения *с помощью компьютеров*. Данный подход кардинально отличается от "классического" подхода 20-го века, стремившегося к созданию модели с минимальным числом вычислительных операций, что часто было связано со значительными временными затратами на предварительную обработку данных. В настоящее время минимизация числа операций играет роль только для задач, требующих для своего решения существенных вычислительных ресурсов. Во всех прочих случаях благодаря большим скоростям обработки данных в современных ЭВМ оптимальной несомненно будет считаться модель, требующая минимальных затрат на ее программирование. И действительно, в качестве примера можно привести такую дисциплину, как математическую статистику, в которой методы расчета условных вариант и условных эмпирических моментов выборки в настоящее время потеряли какоелибо практическое значение и приводятся еще в некоторых учебниках только в качестве рудиментарных приложений.

С другой стороны, все же необходимо обратить внимание на то, что использование готовых встроенных программных инструментов для решения определенного круга задач, требующих использования численных методов, приводит к тому, что студент часто не понимает суть используемого для решения задачи алгоритма (например, калькулятор позволяет рассчитать значение логарифма от какого-то числа без знания алгоритма его расчета). Кроме того, из-за использования таких инструментов навыки программирования у обучающихся либо не достигают необходимого уровня развития, либо теряются на старших курсах. В связи с этим в практикуме также используются практические задания, использующие различный подход к решению задачи, но приводящие, как это и следует ожидать, к одинаковому итоговому результату. Целью этих заданий является развитие у студентов навыков по использованию различных математических подходов к решению поставленной задачи и по поиску путей их конкретной компьютерной реализации.

Для решения задач с помощью численных методов в практикуме предлагается использовать табличный процессор "Excel". Данный выбор не случаен и был обусловлен двумя обстоятельствами. С одной стороны, "Excel" относится к наиболее распространенным на сегодняшний день программным продуктам, овладение которым включено даже в программу средней школы. Тем самым, можно ожидать, что обучающиеся к началу освоения дисциплины уже будут владеть необходимыми умениями и навыками работы в данной программе. С другой стороны, программирование в данном табличном процессоре, несмотря на некоторые ограничения по сравнению с классическими средами программирования и специализированными математическими программами, осуществляется настолько просто и наглядно, что у обучающихся, как правило, не возникают сложности при компьютерной реализации конкретной модели.

Практикум разбит на отдельные практические задания. Материал каждого практического задания включает в себя необходимый, кратко изложенный теоретический материал, указания по решению задачи с использованием одного или нескольких численных методов, компьютерную модель, анализ полученных результатов, а также упражнения для самостоятельной работы. С целью правильного построения графиков функций в табличном процессоре Excel необходимо помнить о том, что после выделения соответствующих данных и выбора вставки диаграммы в качестве типа диаграммы необходимо выбирать опцию "точечная", а не "график". Материалы каждой из тем полностью автономны, что позволит обучающимся при необходимости легко решить поставленную задачу без овладения предыдущим материалом. В конце практикума приведены вопросы, позволяющие в рамках самоконтроля проверить степень усвоения обучающимися изложенного в пособии материала.

Представленный курс неразрывно связан с такими предшествующими дисциплинами учебного плана, как "Высшая математика" и "Информатика". При этом для успешного овладения данным предметом обучающимся потребуются знания основ математического анализа, линейной алгебры, информатики и технологий программирования.

Практическое задание 1.

Решение системы линейных уравнений методом Крамера

Теоретические положения.

Система линейных алгебраических уравнений n-го порядка имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \mathbf{K} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \mathbf{K} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \mathbf{L} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \mathbf{K} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где $a_{11}, a_{12},....a_{nn}$ – коэффициенты перед неизвестными,

$b_1, b_2,....b_n$ – свободные члены,

$x_1, x_2,....x_n$ – неизвестные величины, которые необходимо будет рассчитать.

Если число уравнений, равно числу неизвестных, то можно предположить, что данная система уравнений будет иметь единственное решение. Для решения системы методом Крамера следует вначале составить определитель их коэффициентов перед неизвестными

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ a_{12}......a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22}.....a_{2n} \\ .... \\ a_{n1} \ a_{n2}.....a_{nn} \end{vmatrix}$$

и произвести его расчет. Если данный определитель не будет равен нулю, то система уравнений будет иметь единственное решение. После этого из коэффициентов перед неизвестными и свободных членов составляются n определителей, в которых столбец свободных членов заменяет i-ый столбец коэффициентов перед неизвестными:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 \ a_{12}......a_{1n} \\ b_2 \ a_{22}......a_{2n} \\ .... \\ b_n \ a_{n2}......a_{nn} \end{vmatrix}, \ ...... \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} \ a_{12}.....b_n \\ a_{21} \ a_{22}.....b_n \\ .... \\ a_{n1} \ a_{n2}.....b_n \end{vmatrix}.$$

Неизвестные величины $x_1, x_2,....x_n$ находятся по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},..........x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Порядок выполнения работы.

Необходимо решить следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Введите данные в табличный процессор Excel в качестве матрицы, осуществите расчет определителя Δ с помощью функции МОПРЕД, убедитесь в том, что данный определитель не будет равен нулю, после чего осуществите расчет определителей Δ_i и найдите значения неизвестных. Осуществите проверку решения на примере первого уравнения.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	2	-3	3	-5	3		проверка	
2	1	2	-1	4	6		3	
3	-1	-2	2	-2	2			
4	4	1	1	1	-2			
5								
6	2	-3	3	-5				
7	1	2	-1	4	Δ=	-14		
8	-1	-2	2	-2				
9	4	1	1	1				
10								
11	3	-3	3	-5				
12	6	2	-1	4	Δ1=	-68	x1=	4,85714
13	2	-2	2	-2				
14	-2	1	1	1				
15								
16	2	3	3	-5				
17	1	6	-1	4	Δ2=	293	x2=	-20,929
18	-1	2	2	-2				
19	4	-2	1	1				
20								
21	2	-3	3	-5				
22	1	2	6	4	Δ3=	126	x3=	-9
23	-1	-2	2	-2				
24	4	1	-2	1				
25								
26	2	-3	3	3				
27	1	2	-1	6	Δ4=	-119	x4=	8,5
28	-1	-2	2	2				
29	4	1	1	-2				

Реализация в виде формул

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	2	-3	3	-5	3		проверка	
2	1	2	-1	4	6		=A1*H12+B1*H17+C1*H22+D1*H27	
3	-1	-2	2	-2	2			
4	4	1	1	1	-2			
5								
6	=A1	=B1	=C1	=D1				
7	=A2	=B2	=C2	=D2	Δ=	=МОПРЕД(A6:D9)		
8	=A3	=B3	=C3	=D3				
9	=A4	=B4	=C4	=D4				
10								
11	=E1	=B1	=C1	=D1				
12	=E2	=B2	=C2	=D2	Δ1=	=МОПРЕД(A11:D14)	x1=	=F12/F7
13	=E3	=B3	=C3	=D3				
14	=E4	=B4	=C4	=D4				
15								
16	=A1	=E1	=C1	=D1				
17	=A2	=E2	=C2	=D2	Δ2=	=МОПРЕД(A16:D19)	x2=	=F17/F7
18	=A3	=E3	=C3	=D3				
19	=A4	=E4	=C4	=D4				
20								
21	=A1	=B1	=E1	=D1				
22	=A2	=B2	=E2	=D2	Δ3=	=МОПРЕД(A21:D24)	x3=	=F22/F7
23	=A3	=B3	=E3	=D3				
24	=A4	=B4	=E4	=D4				
25								
26	=A1	=B1	=C1	=E1				
27	=A2	=B2	=C2	=E2	Δ4=	=МОПРЕД(A26:D29)	x4=	=F27/F7
28	=A3	=B3	=C3	=E3				
29	=A4	=B4	=C4	=E4				

Задания для самостоятельной работы

Решите систему уравнений методом Крамера:

Вариант	Система уравнений
1	$\begin{cases} 5x+7y-8z+6t-3v=15 \\ 4x-6y-3z+2t-4v=3 \\ -3x-2y-4z+4t-3v=8 \\ 2x+4y+z+t-4v=2 \\ x+y-3z+3t+v=4 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x+7y-8z+6t-3v=15 \\ 4x-6y-3z+2t-4v=3 \\ -3x-2y-4z+4t-3v=8 \\ 2x+4y+z+t-4v=2 \\ x+y-3z+3t+3v=4 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x+y+2z+6t-3v=15 \\ 4x-6y-3z+2t-4v=3 \\ -3x-2y-4z+4t-3v=8 \\ 2x+4y+z+t-4v=2 \\ x+y-3z+3t+3v=4 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x-y+2z+3t-3v=15 \\ 4x-6y-3z+2t-4v=3 \\ -3x-2y-4z+4t-3v=8 \\ 2x+4y+z+t-4v=2 \\ x+y-3z+3t+3v=4 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x-y+2z+3t-3v=15 \\ x-2y-3z+2t-4v=3 \\ -3x-2y-4z+4t-3v=8 \\ 2x+4y+z+t-4v=2 \\ x+y-3z+3t+3v=4 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x-y+2z+3t-3v=15 \\ x-2y-3z+2t-4v=3 \\ -3x-2y-4z+4t-3v=8 \\ 2x+y+3z+t-4v=2 \\ x+y-3z+3t+3v=4 \end{cases}$

7	$\begin{cases} x-y+2z+3t-3v=15 \\ x-2y-3z+2t-4v=3 \\ -x-y-4z+4t-3v=8 \\ 2x+y+3z+t-4v=2 \\ x+y-3z+3t+3v=4 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x-y+2z+3t-3v=15 \\ x-2y-z+5t-4v=3 \\ -x-y-4z+4t-3v=8 \\ 2x+y+3z+t-4v=2 \\ x+y-3z+3t+3v=4 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 5x-y+2z+3t-v=15 \\ x-2y-z+5t-4v=3 \\ -x-y-4z+4t-3v=8 \\ 2x+y+3z+t-4v=2 \\ x+y-3z+3t+3v=4 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 5x-y+2z+3t-v=15 \\ 3x-2y-z+t-4v=3 \\ -x-y-4z+4t-3v=8 \\ 2x+y+3z+t-4v=2 \\ x+y-3z+3t+3v=4 \end{cases}$

Практическое задание 2.
Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Теоретические положения.
Система линейных алгебраических уравнений n-го порядка имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

где $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nn}$ – коэффициенты перед неизвестными,
$b_1, b_2, \ldots b_n$ – свободные члены,
$x_1, x_2, \ldots x_n$ – неизвестные величины, которые необходимо будет рассчитать.

Если число уравнений, равно числу неизвестных, то можно предположить, что данная система уравнений будет иметь единственное решение. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса основано на преобразовании исходной системы к треугольному (**), а затем к диагональному виду. Для этого, принимая в (*) коэффициент a_{11} в качестве ведущего, осуществляем деление первой строки на этот коэффициент, умножаем ее на коэффициент a_{21} и вычитаем полученный результат из второй строки. Очевидно, что в результате этой операции коэффициент a_{11} будет равен 1, а a_{21} - нулю. Повторяя эту операцию, добиваемся, чтобы все остальные коэффициенты в первом столбце оказались бы равными нулю, т.е. $a_{31} = 0, \ldots a_{n1} = 0$. Аналогично, принимая a_{22} в качестве ведущего, добиваемся нулей в нижележащих строках во втором столбце и т.д., пока в нижней строке не останется уравнение $a_{nn}x_n = b_n$, откуда получаем значение неизвестной $x_n = b_n / a_{nn}$ и новое $a_{nn} = 1$ (если в результате выше названных операций будет получена строка, где все коэффициенты а равны нулю, а свободный член b не равен нулю, то система будет противоречивой; а если все коэффициенты а равны нулю и b равен нулю, то система будет иметь бесконечное количество решений).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ldots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (**)$$

Полученная система (**) решается обратным ходом, т.е. путем получения нулей в вышележащей строке в соответствующем столбце за счет строки, содержащей только один ненулевой, равный единице коэффициент (в качестве первого шага в последнем столбце коэффициентов за счет последней строки). Операции выполняются до тех пор, пока в каждой из строк не останется только один, ненулевой, равный 1 коэффициент (диагональная матрица). Значения свободных членов будут равны при этом значению соответствующих неизвестных.

Порядок выполнения работы:

Необходимо решить следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 1x_4 = -2 \end{cases}$$

Введите данные в табличный процессор Excel в качестве матрицы, реализуйте алгоритм метода Гаусса и приведите матрицу к диагональному виду.

Опираясь на крайний правый столбец, найдите значения неизвестных. Осуществите проверку решения на примере первого уравнения.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	2	-3	1	-5	4		1	-1,5	0,5	0	-10,46
2	1	3	-1	2	6		0	1	-0,3	0	5,874
3	-1	-2	2	-2	2		0	0	1	0	1,594
4	4	1	2	1	-2		0	0	0	1	-4,986
5											
6	1	-1,5	0,5	-2,5	2		1	-1,5	0	0	-11,26
7	0	4,5	-1,5	4,5	4		0	1	0	0	6,406
8	0	-3,5	2,5	-4,5	4		0	0	1	0	1,594
9	0	7	0	11	-10		0	0	0	1	-4,986
10											
11	1	-1,5	0,5	-2,5	2		1	0	0	0	-1,652
12	0	1	-0,333	1	0,8889		0	1	0	0	6,406
13	0	0	1,3333	-1	7,1111		0	0	1	0	1,594
14	0	0	2,3333	4	-16,22		0	0	0	1	-4,986
15											
16	1	-1,5	0,5	-2,5	2			проверка			
17	0	1	-0,333	1	0,8889			4			
18	0	0	1	-0,75	5,3333			6			
19	0	0	0,5556	5,3333	-25,7						

Реализация в виде формул

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	2	-3	1	-5	4		=A16	=B16	=C16	=D16-J4*$D$16	=E16-K4*$D$16
2	1	3	-1	2	6		=A17	=B17	=C17	=D17-J4*$D$17	=E17-K4*$D$17
3	-1	-2	2	-2	2		=A18	=B18	=C18	=D18-J4*$D$18	=E18-K4*$D$18
4	4	1	2	1	-2		=A24	=B24	=C24	=D24/$D$24	=E24/$D$24
5											
6	=A1/$A$1	=B1/$A$1	=C1/$A$1	=D1/$A$1	=E1/$A$1		=G1	=H1	=I1-I3*$I$1	=J1-J3*$I$1	=K1-K3*$I$1
7	=A2-A6*$A$6	=B2-B6*$A$6	=C2-C6*$A$6	=D2-D6*$A$6	=E2-E6*$A$6		=G2	=H2	=I2-I3*$I$2	=J2-J3*$I$2	=K2-K3*$I$2
8	=A3-A6*$A$3	=B3-B6*$A$3	=C3-C6*$A$3	=D3-D6*$A$3	=E3-E6*$A$3		=G3	=H3	=I3	=J3	=K3
9	=A4-A6*$A$4	=B4-B6*$A$4	=C4-C6*$A$4	=D4-D6*$A$4	=E4-E6*$A$4		=G4	=H4	=I4	=J4	=K4
10											
11	=A6	=B6	=C6	=D6	=E6		=G6	=H6-H7*$H$6	=I6-I7*$H$6	=J6-J7*$H$6	=K6-K7*$H$6
12	=A7	=B7/$B$7	=C7/$B$7	=D7/$B$7	=E7/$B$7		=G7	=H7	=I7	=J7	=K7
13	=A8	=B8-B12*$B$8	=C8-C12*$B$8	=D8-D12*$B$8	=E8-E12*$B$8		=G8	=H8	=I8	=J8	=K8
14	=A9	=B9-B12*$B$9	=C9-C12*$B$9	=D9-D12*$B$9	=E9-E12*$B$9		=G9	=H9	=I9	=J9	=K9
15											
16	=A11	=B11	=C11	=D11	=E11			проверка			
17	=A12	=B12	=C12	=D12	=E12			=A1*K11+B1*K12			
18	=A13	=B13	=C13/$C$13	=D13/$C$13	=E13/$C$13			=A2*K11+B2*K12			
19	=A14	=B14	=C14-C13*$C$13	=D14-D13*$C$13	=E14-E13*$C$13						
20											
21	=A16	=B16	=C16	=D16	=E16						
22	=A17	=B17	=C17	=D17	=E17						
23	=A18	=B18	=C18	=D18	=E18						
24	=A19	=B19	=C19-C23*$C$19	=D19-D23*$C$19	=E19-E23*$C$19						

Задания для самостоятельной работы

Используя системы уравнений из задания 1, решите их методом Гаусса.

Практическое задание 3.

Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы.

Теоретические положения.

Система линейных алгебраических уравнений n-го порядка имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \mathbf{K} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \mathbf{K} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \mathbf{L} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \mathbf{K} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Используя ее матричное представление, мы получим матричное уравнение, представляющее собой произведение матриц:

A X = B

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & \ldots\ldots. & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Путем элементарных преобразований можно получить решение системы в виде произведения обратной матрицы для матрицы коэффициентов и матрицы свободных членов.$X = A^{-1}B$. Необходимо отметить, что данный метод требует наименьших временных затрат на программирование.

Порядок выполнения работы.

Необходимо решить следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 1x_4 = -2 \end{cases}$$

Введите данные в табличный процессор Excel в качестве матриц A и B, найдите обратную матрицу для матрицы A (функция МОБР, перед вводом функции необходимо выделить диапазон ячеек 4х4, в который будет записана обратная матрица, и после ввода функции в верхнюю левую ячейку вместо ОК необходимо выполнить команду SHIFT+CTRL+ENTER) и осуществите перемножение матриц (функция МУМНОЖ, перед вводом функции необходимо выделить диапазон ячеек 1х4 и после ввода функции в верхнюю ячейку необходимо выполнить команду SHIFT+CTRL+ENTER).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	2	-3	1	-5	4		матрица В	4
2	1	3	-1	2	6			6
3	-1	-2	2	-2	2			2
4	4	1	2	1	-2			-2
5								
6		2	-3	1	-5			
7	Матрица А	1	3	-1	2			
8		-1	-2	2	-2			
9		4	1	2	1			
10								
11	матрица А обратная	0,086957	-0,17391	-0,30435	0,173913			
12		0,101449	0,797101	0,478261	-0,13043			
13		-0,10145	0,202899	0,521739	0,130435			
14		-0,24638	-0,50725	-0,30435	0,173913			
15				проверка				
16	матрица X	-1,65217		4				
17		6,405797						
18		1,594203						
19		-4,98551						

Реализация в виде формул

	A	B	C	D	E
1	2	-3	1	-5	4
2	1	3	-1	2	6
3	-1	-2	2	-2	2
4	4	1	2	1	-2
5					
6		=A1	=B1	=C1	=D1
7	Матрица А	=A2	=B2	=C2	=D2
8		=A3	=B3	=C3	=D3
9		=A4	=B4	=C4	=D4
10					
11	матрица А обратная	=МОБР(A1:D4)	=МОБР(A1:D4)	=МОБР(A1:D4)	=МОБР(A1:D4)
12		=МОБР(A1:D4)	=МОБР(A1:D4)	=МОБР(A1:D4)	=МОБР(A1:D4)
13		=МОБР(A1:D4)	=МОБР(A1:D4)	=МОБР(A1:D4)	=МОБР(A1:D4)
14		=МОБР(A1:D4)	=МОБР(A1:D4)	=МОБР(A1:D4)	=МОБР(A1:D4)
15				проверка	
16	матрица X	=МУМНОЖ(B11:E14;H1:H4)		=A1*B16+B1*B17+E	
17		=МУМНОЖ(B11:E14;H1:H4)			
18		=МУМНОЖ(B11:E14;H1:H4)			
19		=МУМНОЖ(B11:E14;H1:H4)			

Задания для самостоятельной работы

Используя системы уравнений из задания 1, решите их методом обратной матрицы.

Практическое задание 4.

Построение функций в Excel. Графический метод нахождения корней уравнения

Теоретические положения.

Многие научные и инженерные задачи сводятся к решению нелинейных уравнений одной переменной, не имеющих прямого алгоритма решения. В процессе приближенного отыскания корней такого нелинейного уравнения выделяют два этапа: отделение корня и уточнение корня. Под отделением корня понимают нахождение некоторого промежутка на оси абсцисс, содержащего только один корень решения. Очевидно, что если функция на данном промежутке непрерывна и содержит на нем только один корень, то на концах промежутка эта функция принимает значения разного знака. После отделения промежутков, содержащих по одному корню, начинается процесс нахождения корней. Если уравнение не имеет прямого алгоритма решения, то нахождение корня может осуществляться в рамках одного из итерационных методов, представляющих собой последовательное приближение к истинному значению корня. При этом, как правило, точное решение никогда не достигается, а число итераций, необходимых для достижения необходимой точности решения, заранее неизвестно. Примеры итерационных методов (метод половинного деления, метод золотого сечения, метод простой итерации, метод Ньютона, метод секущих, метод парабол) будут рассмотрены ниже. Однако табличный процессор Excel также позволяет найти необходимое решение с нужной точностью, не используя итерационные методы. Как уже было сказано выше, многие численные метод возникли на основании требования создания модели с минимальным числом вычислительных операций. В настоящее время при решении значительного круга задач число операций не играет значительной роли, что обусловлено воистину гигантскими мощностями вычислительной техники. Тем самым актуальными становятся решений методы, направленные не на минимизацию числа операций, а на простоту компьютерной реализации.

Идея, лежащая в основе графического метода нахождения корней нелинейного уравнения, абсолютно проста: в табличном процессоре Excel строится график соответствующей функции с относительно большим шагом, затем отделяются промежутки, содержащие один корень, после чего на каждом промежутке осуществляется построение функции с более мелким шагом, определяющимся заданной точностью решения. Само решение может быть определено на основании графического построения. К преимуществам данного метода, среди прочего, относится отсутствие каких-либо ограничений на вид нелинейной функции (так, например, метод простой итерации имеет достаточно жесткое условие сходимости).

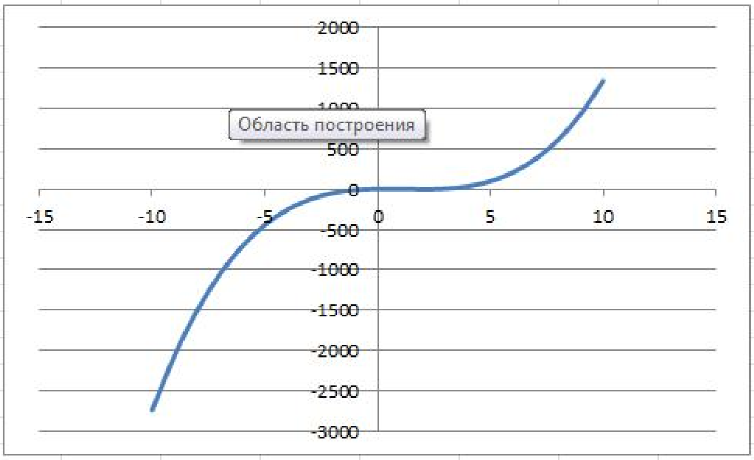
Порядок выполнения работы.

Необходимо найти корни следующего уравнения

$$y = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 2$$

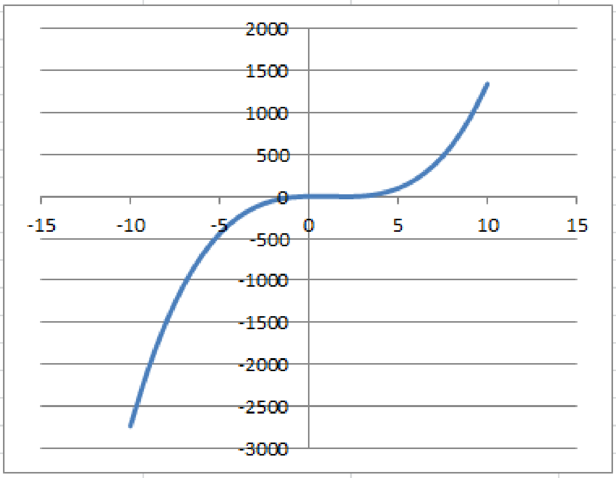
с точностью до одной тысячной. Очевидно, что, поскольку речь идет об уравнении третьего порядка, можно предположить существование трех действительных корней. Простой анализ функции показывает, что в связи с доминирующим влиянием кубического члена при больших по модулю значениях x корни могут располагаться только вблизи нуля. В качестве первого шага решения введем в ячейку A1 значение -10 и осуществим перетягивание значения вниз на 20 строчек с нажатой правой клавишей мыши. Выбрав после перетягивания пункт «Прогрессия» с шагом единица в контекстном меню, получим необходимые для расчетов значения аргумента. Запишем теперь расчетную функцию в ячейку B1, осуществим ее перетягивание и построим график функции (диаграмма, точечная).

	A	B
1	-10	-2738
2	-9	-2059
3	-8	-1502
4	-7	-1055
5	-6	-706
6	-5	-443
7	-4	-254
8	-3	-127
9	-2	-50
10	-1	-11
11	0	2
12	1	1
13	2	-2
14	3	5
15	4	34
16	5	97
17	6	206
18	7	373
19	8	610
20	9	929
21	10	1342

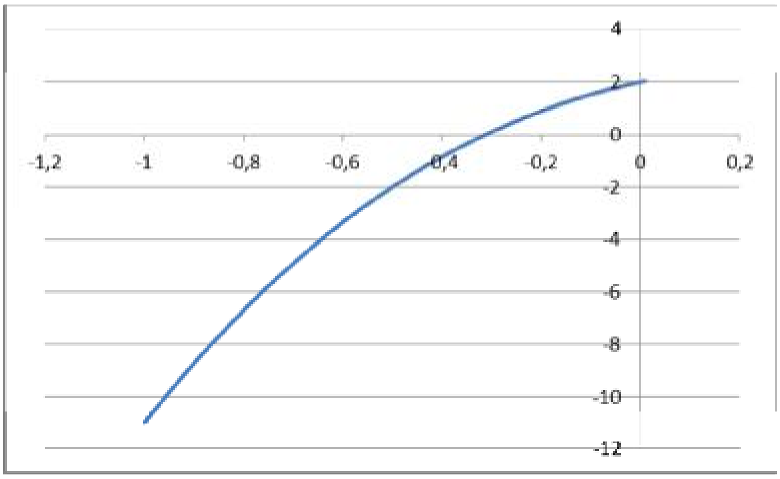


Реализация в виде формул

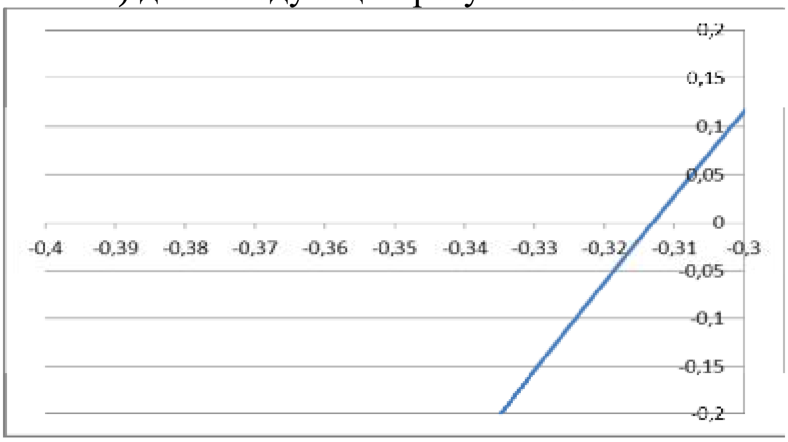
	A	B
1	-10	=2*A1^3-7*A1^2+4*A1+2
2	-9	=2*A2^3-7*A2^2+4*A2+2
3	-8	=2*A3^3-7*A3^2+4*A3+2
4	-7	=2*A4^3-7*A4^2+4*A4+2
5	-6	=2*A5^3-7*A5^2+4*A5+2
6	-5	=2*A6^3-7*A6^2+4*A6+2
7	-4	=2*A7^3-7*A7^2+4*A7+2
8	-3	=2*A8^3-7*A8^2+4*A8+2
9	-2	=2*A9^3-7*A9^2+4*A9+2
10	-1	=2*A10^3-7*A10^2+4*A10+2
11	0	=2*A11^3-7*A11^2+4*A11+2
12	1	=2*A12^3-7*A12^2+4*A12+2
13	2	=2*A13^3-7*A13^2+4*A13+2
14	3	=2*A14^3-7*A14^2+4*A14+2
15	4	=2*A15^3-7*A15^2+4*A15+2
16	5	=2*A16^3-7*A16^2+4*A16+2
17	6	=2*A17^3-7*A17^2+4*A17+2
18	7	=2*A18^3-7*A18^2+4*A18+2
19	8	=2*A19^3-7*A19^2+4*A19+2
20	9	=2*A20^3-7*A20^2+4*A20+2
21	10	=2*A21^3-7*A21^2+4*A21+2



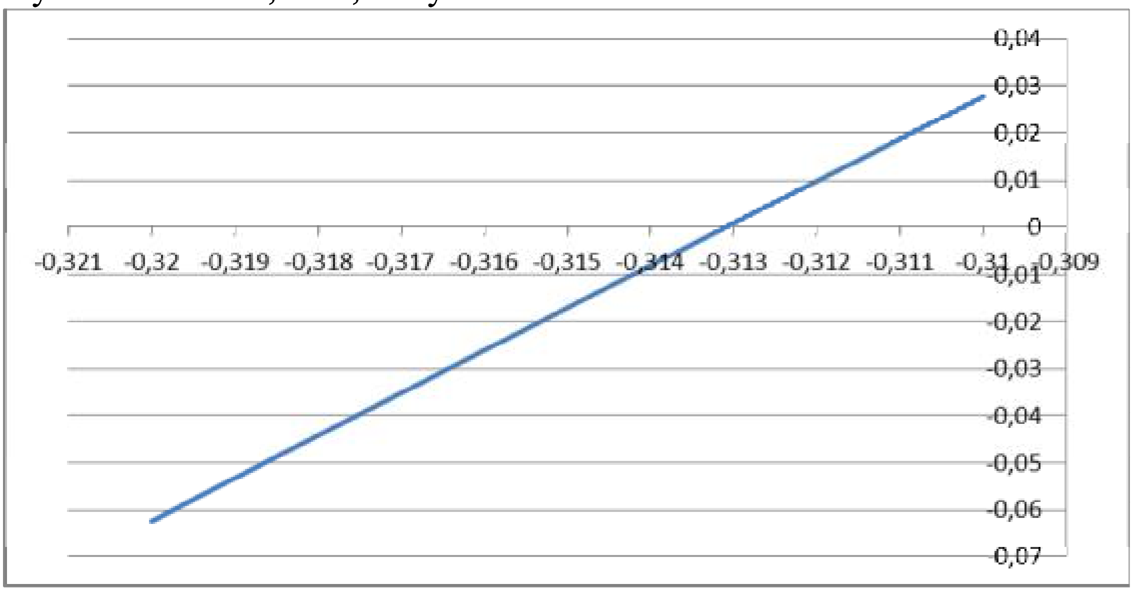
Анализ графика и рассчитанных в столбце B значений показывает, что данное уравнение имеет три корны, причем первый из них располагается на промежутке (-1,0), второй – на промежутке (1,2) и третий) – на промежутке (2,3). Найдем в качестве примера корень на промежутке (-1,0). Для этого необходимо повторить описанную выше операцию с шагом 0,01 с начальным значением -1. В результате будет получен график следующий график:



Его увеличение за счет выбора парметров осей (выделить ось, правая кнопка мыши) даст следующий результат:



Тем самым становится очевиднм, что искомый корень располагается на промежутке (-0,32,-0,31). Произведя выше названную процедуру для данного промежутка с шагом 0,0005, получим



Тем самым искомое значение корня с точностью 0,001 равно -0,313. Однако данная процедура, в принципе, позволяет достичь любую заранее заданную точность.

Два других корня находятся по аналогии.

Задания для самостоятельной работы.

Используя построение функции (диаграмма, точечная), найдите графическим методом с точностью до одной стотысячной корни уравнения:

Вариант	Функция
1	$y = 3x^3 - 60x^2 - 15x + 7$
2	$y = 3x^3 - 40x^2 - 15x + 7$
3	$y = 2x^3 - 40x^2 - 15x + 7$
4	$y = 3x^3 - 40x^2 - 15x + 35$
5	$y = x^3 - 40x^2 - 15x + 15$
6	$y = 4x^3 - 40x^2 - 15x + 15$
7	$y = 4x^3 - 60x^2 - 15x + 15$
8	$y = 3x^3 - 70x^2 - 15x + 15$
9	$y = 2x^3 - 70x^2 - 15x + 15$
10	$y = 3x^3 - 80x^2 - 25x + 18$

Практическое задание 5.

Графический метод решения систем уравнений

Теоретические положения.

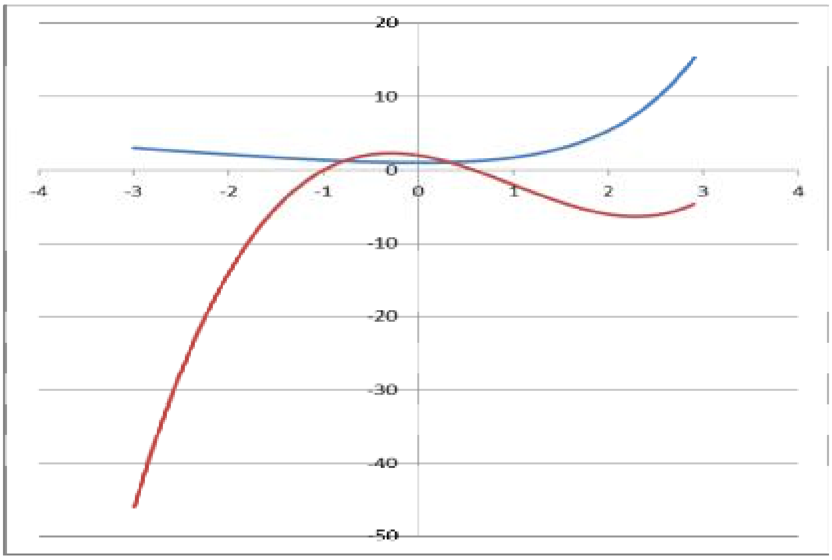
Данная задача по своему существу мало отличается от предыдущей. Путем элементарных преобразований система уравнений сводится к одному, после чего можно следовать предыдущему алгоритму решения задачи. Тем не менее, для лучшего понимания сущности задачи в значительном числе случаев в начале выполнения задания будет иметь смысл построить графики каждого уз уравнений отдельно, и только после этого свести систему к одному уравнению.

Порядок выполнения работы:

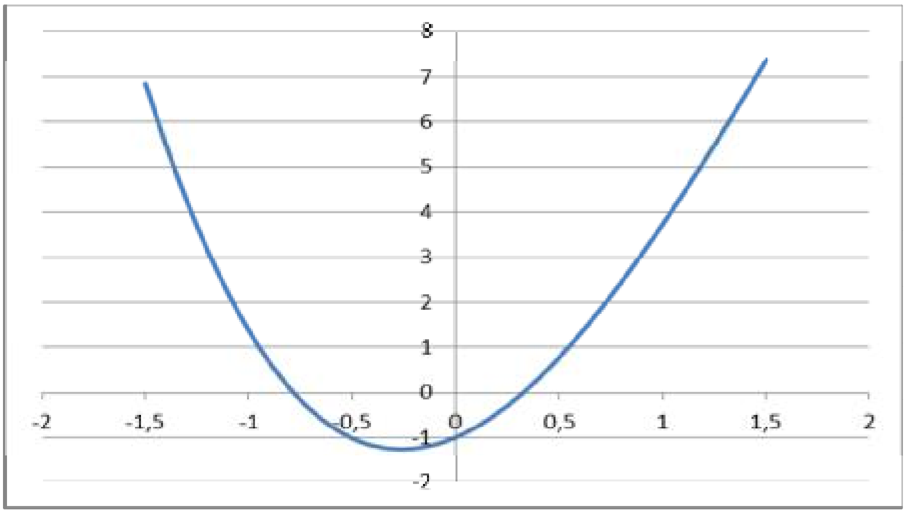
Необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} e^x - x = y \\ x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = y \end{cases}$$

Простой анализ системы уравнений показывает, что в связи с доминирующим влиянием кубического члена при больших отрицательных значениях x и доминированием экспоненты при больших положительных значениях x корни системы могут располагаться только вблизи нуля. Построение двух функция в диапазоне [-3,3] с шагом 0,1 (механизм построения графиков функций рассмотрен в предыдущем задании) приводит к следующему результату:



Вычтя второе уравнение из первого и произведя построение полученной функции в диапазоне нахождения двух ее корней [-1,5, 1,5] с шагом 0,1, получим:



Дальнейшее нахождение корней осуществляется в соответствии с алгоритмом предыдущего задания.

Задания для самостоятельной работы

Используя построение функций (графический метод), найдите с точностью до одной стотысячной решения системы уравнений:

1. $\begin{cases} e^x - 2x = y \\ \sin x = y \end{cases}$

2. $\begin{cases} e^x - x = y \\ \cos x + 2 = y \end{cases}$

3. $\begin{cases} e^x - 2x = y \\ x^3 - 2x^2 - 3x + 3 = y \end{cases}$

4. $\begin{cases} |\ln x| = y \\ 2x^3 - x^2 + 2x + 2 = y \end{cases}$

5. $\begin{cases} e^x - 5x = y \\ x^3 - x^2 + 3x + 2 = y \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2e^x - x^2 = y \\ 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = y \end{cases}$

7. $\begin{cases} e^x - 2x = y \\ x + |\ln x| = y \end{cases}$

8. $\begin{cases} -2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = y \\ x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = y \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2e^x - x = y \\ -x^3 - x^2 + x + 4 = y \end{cases}$

10. $\begin{cases} -e^x + x = y \\ 4x^3 - 2x^2 - x + 1 = y \end{cases}$

Практическое задание 6.

Метод половинного деления

Теоретические положения.

Как и в предыдущем задании, речь идет о решении нелинейного уравнения с одной переменной, не имеющего прямого алгоритма решения. Путем анализа функции (например, путем ее графического построения в соответствии с предыдущим заданием) мы отделяем промежутки, содержащие корни. После отделения промежутков, содержащих по одному корню, применим итерационный процесс нахождения корней, получивший название метода половинного деления или метода биекций.

Будем считать, что корень t функции $f(x)$ отделён на отрезке [a, b], т.е. функция непрерывна на этом отрезке и имеет на его концах значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$. Поделив отрезок [a, b] пополам, получим точку с координатой $c=(a+b)/2$ и два отрезка [a, c] и [c, b]. Если случайно f(c) равен нулю, то корень найден. Если нет, то из двух отрезков выбирается такой, для которого $f(a)\cdot f(c)$ или $f(c)\cdot f(b)$ будет меньше нуля. После этого процедура повторяется. Новый отрезок делим пополам, находим средину отрезка и т.д.

Для того, чтобы найти приближённое значение корня с некоторой точностью $\epsilon>0$, необходимо остановить процесс половинного деления на таком шаге n, на котором концы отрезка $|a_n-c_n|$ или, соответственно $|c_n-b_n|$ будут меньше ε, определить середину отрезка и прекратить вычисление. Можно также взять следить за изменениями соответствующей позиции после запятой и прекратить расчет, когда изменения цифр после нескольких итераций прекратятся.

Порядок выполнения работы:

Необходимо найти корни уравнения из предыдущего задания

$$y = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 2$$

В качестве примера рассмотрим поиск корня, который располагается в интервале [-1,0]. Произведем расчеты с соответствующими границами:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	граница 1	граница 2	f(a)	f(b)	(a+b)/2	f((a+b)/2)	f(a)*f(a+b)/	f(b)*f(a+b)/	новая граница a	новая граница b
2	-1	0	-11	2	-0,5	-2	22	-4	-0,5	0
3	-0,5	0	-2	2	-0,25	0,53125	-1,0625	1,0625	-0,5	-0,25
4	-0,5	-0,25	-2	0,53125	-0,375	-0,58984	1,179688	-0,31335	-0,375	-0,25
5	-0,375	-0,25	-0,58984	0,53125	-0,3125	0,005371	-0,00317	0,002853	-0,375	-0,3125
6	-0,375	-0,3125	-0,58984	0,005371	-0,34375	-0,28339	0,167154	-0,00152	-0,34375	-0,3125
7	-0,34375	-0,3125	-0,28339	0,005371	-0,32813	-0,13682	0,038772	-0,00073	-0,32813	-0,3125
8	-0,32813	-0,3125	-0,13682	0,005371	-0,32031	-0,06518	0,008918	-0,00035	-0,32031	-0,3125
9	-0,32031	-0,3125	-0,06518	0,005371	-0,31641	-0,02977	0,00194	-0,00016	-0,31641	-0,3125
10	-0,31641	-0,3125	-0,02977	0,005371	-0,31445	-0,01216	0,000362	-6,5E-05	-0,31445	-0,3125
11	-0,31445	-0,3125	-0,01216	0,005371	-0,31348	-0,00339	4,12E-05	-1,8E-05	-0,31348	-0,3125
12	-0,31348	-0,3125	-0,00339	0,005371	-0,31299	0,000994	-3,4E-06	5,34E-06	-0,31348	-0,31299
13	-0,31348	-0,31299	-0,00339	0,000994	-0,31323	-0,0012	4,06E-06	-1,2E-06	-0,31323	-0,31299
14	-0,31323	-0,31299	-0,0012	0,000994	-0,31311	-0,0001	1,22E-07	-1E-07	-0,31311	-0,31299
15	-0,31311	-0,31299	-0,0001	0,000994	-0,31305	0,000446	-4,5E-08	4,43E-07	-0,31311	-0,31305
16	-0,31311	-0,31305	-0,0001	0,000446	-0,31308	0,000172	-1,7E-08	7,68E-08	-0,31311	-0,31308
17	-0,31311	-0,31308	-0,0001	0,000172	-0,3131	3,54E-05	-3,6E-09	6,09E-09	-0,31311	-0,3131
18	-0,31311	-0,3131	-0,0001	3,54E-05	-0,3131	-3,3E-05	3,36E-09	-1,2E-09	-0,3131	-0,3131
19	-0,3131	-0,3131	-3,3E-05	3,54E-05	-0,3131	1,14E-06	-3,8E-11	4,02E-11	-0,3131	-0,3131

Формульное выражение:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	граница 1	граница 2	f(a)	f(b)	(a+b)/2	f((a+b)/2)	f(a)*f(a+b)/2	f(b)*f(a+b)/2	новая граница a	новая граница b
2	-1	0	=2*A2^3-7*A2^2+4*A2+2	=2*B2^3-7*B2^2+4*B2+2	=(B2+A2)/2	=2*E2^3-7*E2^2+4*E2+2	=C2*F2	=D2*F2	=ЕСЛИ(G2<0;A2;E2)	=ЕСЛИ(H2<0;B2;E2)
3	=I2	=J2	=2*A3^3-7*A3^2+4*A3+2	=2*B3^3-7*B3^2+4*B3+2	=(B3+A3)/2	=2*E3^3-7*E3^2+4*E3+2	=C3*F3	=D3*F3	=ЕСЛИ(G3<0;A3;E3)	=ЕСЛИ(H3<0;B3;E3)
4	=I3	=J3	=2*A4^3-7*A4^2+4*A4+2	=2*B4^3-7*B4^2+4*B4+2	=(B4+A4)/2	=2*E4^3-7*E4^2+4*E4+2	=C4*F4	=D4*F4	=ЕСЛИ(G4<0;A4;E4)	=ЕСЛИ(H4<0;B4;E4)
5	=I4	=J4	=2*A5^3-7*A5^2+4*A5+2	=2*B5^3-7*B5^2+4*B5+2	=(B5+A5)/2	=2*E5^3-7*E5^2+4*E5+2	=C5*F5	=D5*F5	=ЕСЛИ(G5<0;A5;E5)	=ЕСЛИ(H5<0;B5;E5)
6	=I5	=J5	=2*A6^3-7*A6^2+4*A6+2	=2*B6^3-7*B6^2+4*B6+2	=(B6+A6)/2	=2*E6^3-7*E6^2+4*E6+2	=C6*F6	=D6*F6	=ЕСЛИ(G6<0;A6;E6)	=ЕСЛИ(H6<0;B6;E6)
7	=I6	=J6	=2*A7^3-7*A7^2+4*A7+2	=2*B7^3-7*B7^2+4*B7+2	=(B7+A7)/2	=2*E7^3-7*E7^2+4*E7+2	=C7*F7	=D7*F7	=ЕСЛИ(G7<0;A7;E7)	=ЕСЛИ(H7<0;B7;E7)
8	=I7	=J7	=2*A8^3-7*A8^2+4*A8+2	=2*B8^3-7*B8^2+4*B8+2	=(B8+A8)/2	=2*E8^3-7*E8^2+4*E8+2	=C8*F8	=D8*F8	=ЕСЛИ(G8<0;A8;E8)	=ЕСЛИ(H8<0;B8;E8)
9	=I8	=J8	=2*A9^3-7*A9^2+4*A9+2	=2*B9^3-7*B9^2+4*B9+2	=(B9+A9)/2	=2*E9^3-7*E9^2+4*E9+2	=C9*F9	=D9*F9	=ЕСЛИ(G9<0;A9;E9)	=ЕСЛИ(H9<0;B9;E9)
10	=I9	=J9	=2*A10^3-7*A10^2+4*A10+2	=2*B10^3-7*B10^2+4*B10+2	=(B10+A10)/2	=2*E10^3-7*E10^2+4*E10+2	=C10*F10	=D10*F10	=ЕСЛИ(G10<0;A10;E10)	=ЕСЛИ(H10<0;B10;E10)
11	=I10	=J10	=2*A11^3-7*A11^2+4*A11+2	=2*B11^3-7*B11^2+4*B11+2	=(B11+A11)/2	=2*E11^3-7*E11^2+4*E11+2	=C11*F11	=D11*F11	=ЕСЛИ(G11<0;A11;E11)	=ЕСЛИ(H11<0;B11;E11)
12	=I11	=J11	=2*A12^3-7*A12^2+4*A12+2	=2*B12^3-7*B12^2+4*B12+2	=(B12+A12)/2	=2*E12^3-7*E12^2+4*E12+2	=C12*F12	=D12*F12	=ЕСЛИ(G12<0;A12;E12)	=ЕСЛИ(H12<0;B12;E12)
13	=I12	=J12	=2*A13^3-7*A13^2+4*A13+2	=2*B13^3-7*B13^2+4*B13+2	=(B13+A13)/2	=2*E13^3-7*E13^2+4*E13+2	=C13*F13	=D13*F13	=ЕСЛИ(G13<0;A13;E13)	=ЕСЛИ(H13<0;B13;E13)
14	=I13	=J13	=2*A14^3-7*A14^2+4*A14+2	=2*B14^3-7*B14^2+4*B14+2	=(B14+A14)/2	=2*E14^3-7*E14^2+4*E14+2	=C14*F14	=D14*F14	=ЕСЛИ(G14<0;A14;E14)	=ЕСЛИ(H14<0;B14;E14)
15	=I14	=J14	=2*A15^3-7*A15^2+4*A15+2	=2*B15^3-7*B15^2+4*B15+2	=(B15+A15)/2	=2*E15^3-7*E15^2+4*E15+2	=C15*F15	=D15*F15	=ЕСЛИ(G15<0;A15;E15)	=ЕСЛИ(H15<0;B15;E15)
16	=I15	=J15	=2*A16^3-7*A16^2+4*A16+2	=2*B16^3-7*B16^2+4*B16+2	=(B16+A16)/2	=2*E16^3-7*E16^2+4*E16+2	=C16*F16	=D16*F16	=ЕСЛИ(G16<0;A16;E16)	=ЕСЛИ(H16<0;B16;E16)
17	=I16	=J16	=2*A17^3-7*A17^2+4*A17+2	=2*B17^3-7*B17^2+4*B17+2	=(B17+A17)/2	=2*E17^3-7*E17^2+4*E17+2	=C17*F17	=D17*F17	=ЕСЛИ(G17<0;A17;E17)	=ЕСЛИ(H17<0;B17;E17)
18	=I17	=J17	=2*A18^3-7*A18^2+4*A18+2	=2*B18^3-7*B18^2+4*B18+2	=(B18+A18)/2	=2*E18^3-7*E18^2+4*E18+2	=C18*F18	=D18*F18	=ЕСЛИ(G18<0;A18;E18)	=ЕСЛИ(H18<0;B18;E18)
19	=I18	=J18	=2*A19^3-7*A19^2+4*A19+2	=2*B19^3-7*B19^2+4*B19+2	=(B19+A19)/2	=2*E19^3-7*E19^2+4*E19+2	=C19*F19	=D19*F19	=ЕСЛИ(G19<0;A19;E19)	=ЕСЛИ(H19<0;B19;E19)

Как видно из проведенных расчетов, формулы и данные приходится вводить вручную только в первую строку и две первых ячейки второй строки. Дальнейший расчет осуществляется путем перетягивания второй строки. Расчеты были прекращены после прекращения изменений цифры в четвертой позиции после запятой.

Метод половинного деления прост и надежен, а также всегда сходится.

Задания для самостоятельной работы

Используя условия заданий из темы №4, найдите корни уравнений методом половинного деления с точностью до 0,0001.

Практическое задание 7.

Метод простой итерации нахождения корней нелинейных уравнений

Теоретические положения.

Данный метод используется для нахождения корней уравнения вида x=φ(x). Поскольку данный метод к тому же является сходящимся только при выполнении условия │φ'(x)│<1, данный метод не обладает в настоящее время высокой популярностью. Тем не менее, при выполнении выше названных специальных условий метод является достаточно эффективным.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию метода. На интервале, внутри которого находится корень, его положение будет определяться в виде пересекающихся линий y=φ(x) и y=x (см. рис. 1). Полагая, что известно нулевое приближение x_0, для нахождения корня x* строится итерационный процесс $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, который изображен на рис.1 ломаной линией со стрелками, указывающими направление движения к корню. Неограниченное повторение вычислений позволит сколь угодно близко приблизиться к корню x*.

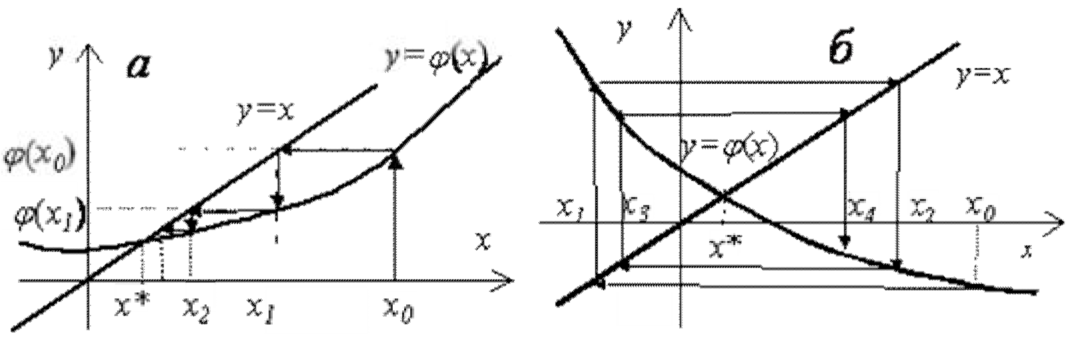


Рис. 1 Сходящийся метод простой итерации

Если │φ'(x)│>1, то метод простой итерации может не сходиться, как это продемонстрировано на рис. 2

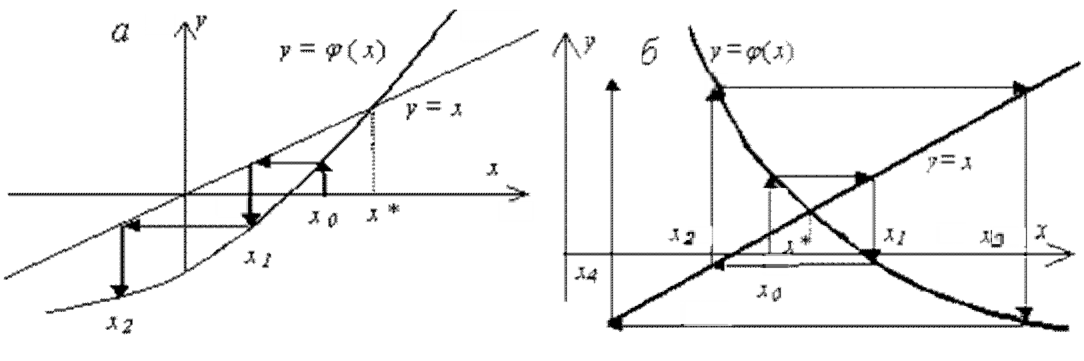
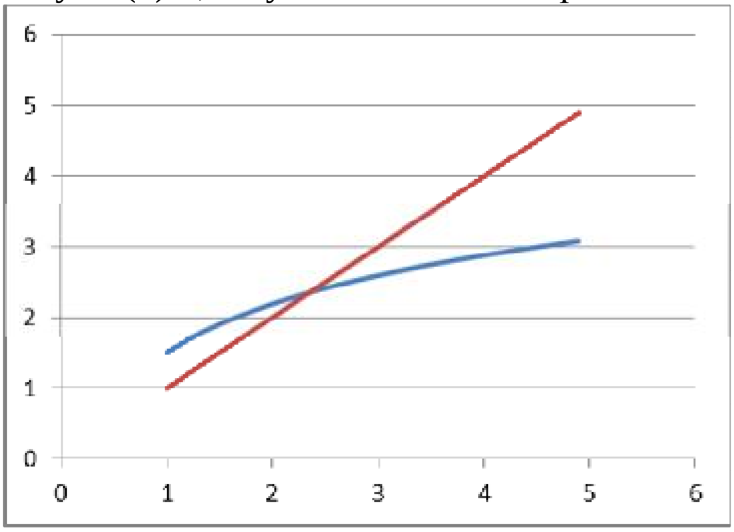


Рис. 2. Расходящийся метод простой итерации

Расхождение также может и в случае │φ'(x)│<1, если начальное приближение выбрано далеко от корня.

Порядок выполнения работы.

Необходимо найти корни следующего уравнения ln(x)-1,5=x. Определение производной φ'(x)=1/x показывает, что для значений x>1 можно ожидать сходимости алгоритма метода простой итерации. Исходя из общих знаний о свойствах линейной и логарифмической функции, можно предположить, что корень уравнения находится в интервале [1,5]. Построение графиков двух функция y=ln(x)-1,5 и y=x в данном интервале подтверждает это.



Реализуем алгоритм метода простой итерации с начальным приближением 1,3

	A	B	C	D	E	F
1	1	1,5	1		x0	x1
2	1	1,5953	1,1		1,3	1,7624
3	1	1,6823	1,2		1,76	2,0667
4	1	1,7624	1,3		2,07	2,2259
5	1	1,8365	1,4		2,23	2,3002
6	2	1,9055	1,5		2,3	2,333
7	2	1,97	1,6		2,33	2,3471
8	2	2,0306	1,7		2,35	2,3532
9	2	2,0878	1,8		2,35	2,3558
10	2	2,1419	1,9		2,36	2,3569
11	2	2,1931	2		2,36	2,3573
12	2	2,2419	2,1		2,36	2,3575
13	2	2,2885	2,2		2,36	2,3576
14	2	2,3329	2,3		2,36	2,3577
15	2	2,3755	2,4		2,36	2,3577
16	3	2,4163	2,5		2,36	2,3577
17	3	2,4555	2,6		2,36	2,3577
18	3	2,4933	2,7		2,36	2,3577
19	3	2,5296	2,8		2,36	2,3577
20	3	2,5647	2,9		2,36	2,3577
21	3	2,5986	3		2,36	2,3577
22	3	2,6314	3,1		2,36	2,3577
23	3	2,6632	3,2		2,36	2,3577
24	3	2,6939	3,3		2,36	2,3577
25	3	2,7238	3,4		2,36	2,3577
26	4	2,7528	3,5			

Формульное выражение

	A	B	C	D	E	F
1	1	=LN(A1)+1,5	=A1		x0	x1
2	1,1	=LN(A2)+1,5	=A2		1,3	=LN(E2)+1,5
3	1,2	=LN(A3)+1,5	=A3		=F2	=LN(E3)+1,5
4	1,3	=LN(A4)+1,5	=A4		=F3	=LN(E4)+1,5
5	1,4	=LN(A5)+1,5	=A5		=F4	=LN(E5)+1,5
6	1,5	=LN(A6)+1,5	=A6		=F5	=LN(E6)+1,5
7	1,6	=LN(A7)+1,5	=A7		=F6	=LN(E7)+1,5
8	1,7	=LN(A8)+1,5	=A8		=F7	=LN(E8)+1,5
9	1,8	=LN(A9)+1,5	=A9		=F8	=LN(E9)+1,5
10	1,9	=LN(A10)+1,5	=A10		=F9	=LN(E10)+1,5
11	2	=LN(A11)+1,5	=A11		=F10	=LN(E11)+1,5
12	2,1	=LN(A12)+1,5	=A12		=F11	=LN(E12)+1,5
13	2,2	=LN(A13)+1,5	=A13		=F12	=LN(E13)+1,5
14	2,3	=LN(A14)+1,5	=A14		=F13	=LN(E14)+1,5
15	2,4	=LN(A15)+1,5	=A15		=F14	=LN(E15)+1,5
16	2,5	=LN(A16)+1,5	=A16		=F15	=LN(E16)+1,5
17	2,6	=LN(A17)+1,5	=A17		=F16	=LN(E17)+1,5
18	2,7	=LN(A18)+1,5	=A18		=F17	=LN(E18)+1,5
19	2,8	=LN(A19)+1,5	=A19		=F18	=LN(E19)+1,5
20	2,9	=LN(A20)+1,5	=A20		=F19	=LN(E20)+1,5
21	3	=LN(A21)+1,5	=A21		=F20	=LN(E21)+1,5
22	3,1	=LN(A22)+1,5	=A22		=F21	=LN(E22)+1,5
23	3,2	=LN(A23)+1,5	=A23		=F22	=LN(E23)+1,5
24	3,3	=LN(A24)+1,5	=A24		=F23	=LN(E24)+1,5
25	3,4	=LN(A25)+1,5	=A25		=F24	=LN(E25)+1,5
26	3,5	=LN(A26)+1,5	=A26			

Как видно из проведенных расчетов, метод дал необходимое приближение уже на 14-й итерации.

Задания для самостоятельной работы

Используя метод простой итерации, найдите корни уравнения методом половинного деления с точностью до 0,0001.

1. x= 2 ln(x)+3
2. x= 3 ln(x)+2
3. x= 1,5 ln(x)+3
4. x= 2 ln(x)+4
5. x= 4 ln(x)+3
6. x= 4 ln(x)+2
7. x= 1,7 ln(x)+3
8. x= 2,2 ln(x)+2
9. x= 2,4 ln(x)+3
10. x= 2,3 ln(x)+2

Практическое задание 8.

Метод Ньютона

Теоретические положения.

Данный метод, также называемый часто методом касательных, используется для нахождения корней уравнения вида f(x)=0. Предполагая, что функция f(x) имеет непрерывную первую и вторую производные, разложим ее в ряд Тейлора, считая x* истинным значением корня, а x_k - k-тым приближением корня, и ε_k=x*-x_k:

$$f(x^*) = f(x_k) + e_k f'(x_k) + \frac{(e_k)^2}{2} f''(x_k) + \ldots\ldots$$

Поскольку по условиям задачи f(x*)=0, а ε_k мало в случае достаточно близкого расположения x_k к x*, получим:

$f(x_k)+e_k f'(x_k)=0.$

Тем самым нам удается получить уравнение, линейное относительно погрешности k-той итерации ε_k. Выразим из данной формулы ε_k:

$e_k = -.f(x_k)/f'(x_k)$

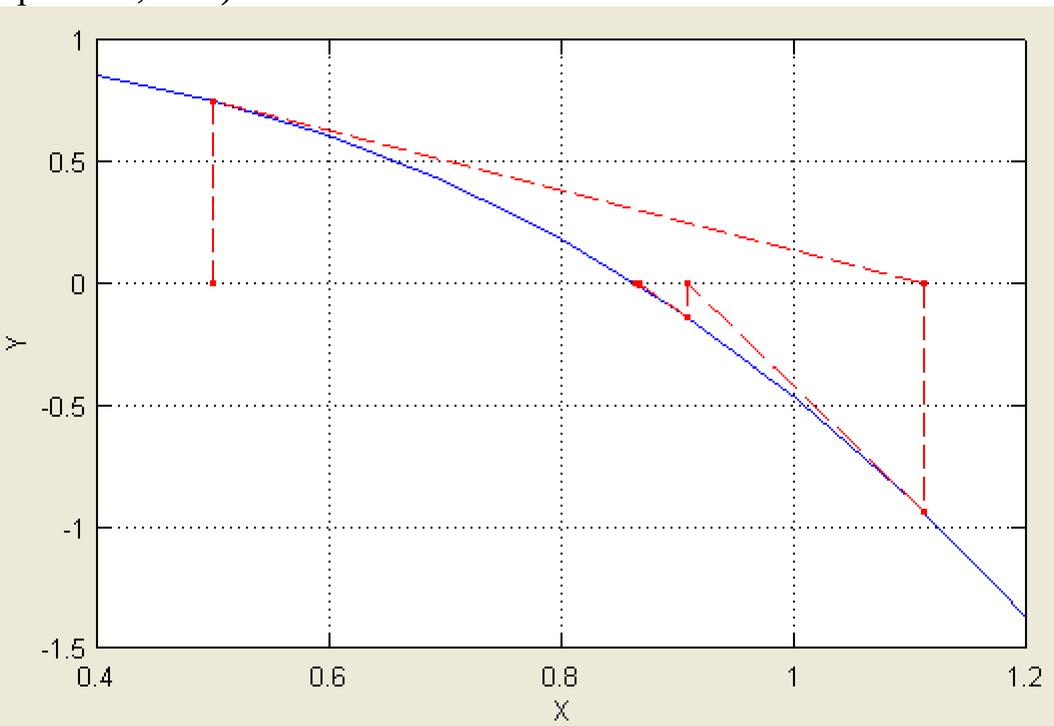
Предполагая, что $x_{k+1} = x_k + \varepsilon_k$, получим основное соотношение метода Ньютона в форме

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Данное соотношение позволяет получить последовательность приближения к корню уравнения x*. Вычисления нужно будет продолжать до тех пор, пока не выполнится условие достижения необходимой погрешности вычислений $|x_k - x_{k+1}| \le e$,

где e – заданная погрешность.

Геометрически итерационный процесс означает построение на каждой итерации касательную к графику функции в точке (x_k , f(x_k)) с целью определения нового значения x_{k+1} как координаты точки пересечения касательной с осью X. Именно поэтому данный метод имеет еще одно название - метод касательных (см. рисунок: иллюстрация применения метода Ньютона к функции y=cos x - x^3 с начальным приближением в точке x=0,5; значение корня с точностью до 0,0001 равно 0,8654):

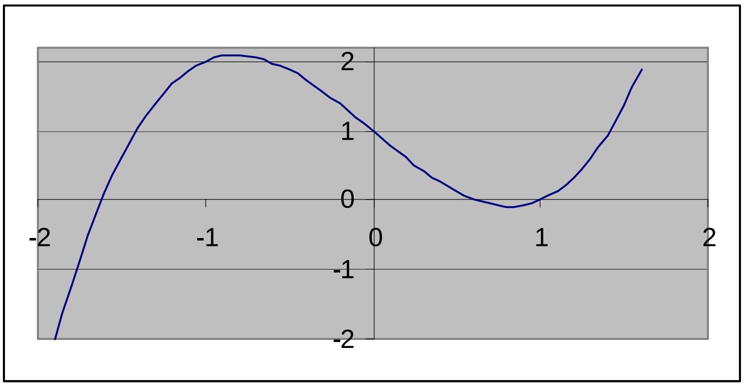


Условие ограничения применимости метода сходимости имеет вид:

$|f(x)\cdot f''(x)| \le |f'(x)|^2$

Тем самым область применимости данного метода априори превышает область применимости метода итераций (например, это относится к полиномам, содержащим полиномы). К тому же сходимость метода также реализуется в большинстве случаев при выборе произвольного начального приближения, находящегося вдали от корня. Тем не менее, рекомендуется все же использовать при расчетах первое приближение, все же лежащее вблизи корня. Например, следующий пример иллюстрирует возможность зацикливания метода.

Предположим, что исходная функция равна $y=x^3-2x+1$. Простой анализ функции приводит к выводу, что корни уравнения должны располагаться вблизи нуля (доминирующее значение кубического члена при больших значениях x по модулю). И действительно, построение графика функции на интервале [-2, 1,5] приводит к следующему результату



Из рисунка видно, что на данном интервале располагаются три действительных корня. Однако проведение расчетов при помощи формулы

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x^3 - 2x + 1)}{(3x^2 - 2)}$$

с начальным приближением x=-0,5 приведет к зацикливанию

x_k	x_{k+1}
-0,5	1
1	1
1	1
1	1

Зацикливание будет наблюдаться примерно до значения x=-0,43. Однако уже при значении x=-0,42 будет ухвачен первый положительный корень:

x_k	x_{k+1}
-0,42	0,780647
0,780647	0,282537
0,282537	0,542392
0,542392	0,609315
0,609315	0,617876
0	0

,617876	,618034
0 ,618034	0 ,618034
0 ,618034	0 ,618034

При этом интересно обратить внимание на то, что удаленность от первого корня в сторону отрицательных значений не окажет в данном случает влияния на сходимость метода, как показывает следующий расчет

x_k	x_{k+1}
- 100	- 66,6711
- 66,6711	- 44,4542
- 44,4542	- 29,6463
- 29,6463	- 19,7796
- 19,7796	- 13,2097
- 13,2097	- 8,84219
- 8,84219	- 5,94979
- 5,94979	- 4,05226
- 4,05226	- 2,83698
- 2,83698	- 2,10729
- 2,10729	- 1,74135
- 1,74135	- 1,62896
- 1,62896	- 1,61813
- 1,61813	- 1,61803
- 1,61803	- 1,61803

Также необходимо обратить внимание на поведение метода с начальным приближением в интервале, лежащем между корнями. Так выбор начального приближения x=0,9 дает

x_k	x_{k+1}
0 ,9	1 ,065116
1 ,065116	1 ,009457
1 ,009457	1 ,000255
1 ,000255	1
1	1
1	1

Напротив, расчет с начальным приближением x=0,8 приводит к следующему результату:

x_k	x_{k+1}
0	-

,8	0,3
- 0,3	0 ,609249
0 ,609249	0 ,617874
0 ,617874	0 ,618034
0 ,618034	0 ,618034
0 ,618034	0 ,618034

Данный пример наглядно иллюстрирует необходимость правильного выбора начального приближения дубовая листва нахождения корней уравнения.

Метод Ньютона обладает высокой скоростью сходимости (на каждой итерации ошибка пропорциональна квадрату ошибки на предыдущей итерации) и возможности обобщения на решение систем уравнений. Однако метод будет расходящимся в областях, где имеет место f'(x)=0.

Порядок выполнения работы.

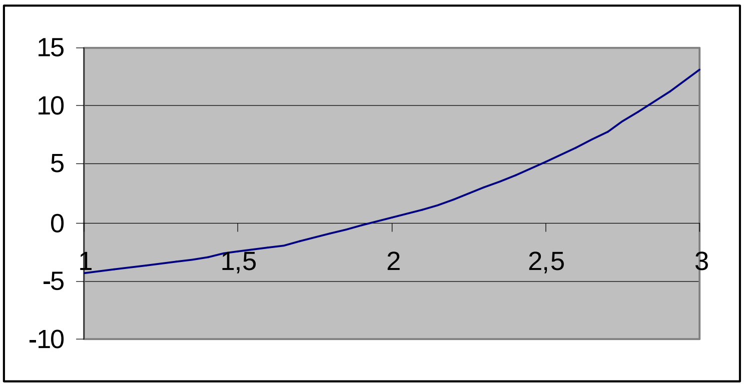
Необходимо найти корень уравнения

$$e^x - 7 = 0$$

Анализ условия применимости метода Ньютона

$$\left| f(x) \cdot f''(x) \right| \le \left| f'(x) \right|^2$$

показывает, что он применим для нахождения корня данного уравнения. Анализ на основе знания основных свойств элементарных функций показывает, что уравнение должно иметь единственный корень, который должен находиться в диапазоне [1, 3]. Действительно, построение функции в диапазоне [1, 3] приводит к ожидаемому результату



Взяв в качестве первого приближения значение x=1,5 и используя для расчетов формулу

$$x_{k+1} = x_k - (e^{x_k} - 7) / e^{x_k}$$

получим следующие результаты расчетов

	A	B	C	D	E
1	1	-4,28172		1	2,575156
2	1,1	-3,99583		2,575156	2,10815
3	1,2	-3,67988		2,10815	1,958387
4	1,3	-3,3307		1,958387	1,945988
5	1,4	-2,9448		1,945988	1,94591
6	1,5	-2,51831		1,94591	1,94591
7	1,6	-2,04697		1,94591	1,94591
8	1,7	-1,52605			
9	1,8	-0,95035			
10	1,9	-0,31411			
11	2	0,389056			
12	2,1	1,16617			
13	2,2	2,025013			
14	2,3	2,974182			
15	2,4	4,023176			
16	2,5	5,182494			
17	2,6	6,463738			
18	2,7	7,879732			
19	2,8	9,444647			

Формульное выражение

	A	B	C	D	E
1	1	=EXP(A1)-7		=A1	=D1-(EXP(D1)-7)/EXP(D1)
2	1,1	=EXP(A2)-7		=E1	=D2-(EXP(D2)-7)/EXP(D2)
3	1,2	=EXP(A3)-7		=E2	=D3-(EXP(D3)-7)/EXP(D3)
4	1,3	=EXP(A4)-7		=E3	=D4-(EXP(D4)-7)/EXP(D4)
5	1,4	=EXP(A5)-7		=E4	=D5-(EXP(D5)-7)/EXP(D5)
6	1,5	=EXP(A6)-7		=E5	=D6-(EXP(D6)-7)/EXP(D6)
7	1,6	=EXP(A7)-7		=E6	=D7-(EXP(D7)-7)/EXP(D7)
8	1,7	=EXP(A8)-7			
9	1,8	=EXP(A9)-7			
10	1,9	=EXP(A10)-7			
11	2	=EXP(A11)-7			
12	2,1	=EXP(A12)-7			
13	2,2	=EXP(A13)-7			
14	2,3	=EXP(A14)-7			
15	2,4	=EXP(A15)-7			
16	2,5	=EXP(A16)-7			
17	2,6	=EXP(A17)-7			
18	2,7	=EXP(A18)-7			
19	2,8	=EXP(A19)-7			
20	2,9	=EXP(A20)-7			
21	3	=EXP(A21)-7			

Задания для самостоятельной работы

Используя метод Ньютона, найдите корни следующего уравнения с точностью до 0,000001: $x^3+Ax^2+Bx+C = 0$ с коэффициентами A, B и C, представленными в таблице:

№	A	B	C
1	-0.02	-1.2	-0.42
2	-0.89	-0.16	0.11
3	-1.28	0.17	0.13
4	-1.57	0.18	0.008

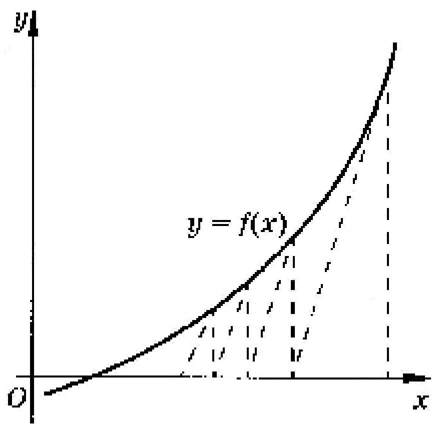
5	-1.19	-0.37	0.49
6	-2.48	1.66	-0.28
7	-1.72	0.56	0.042
8	-0.3	-0.43	-0.04
9	-1.42	0.09	0.23
10	-2.12	0.8	0.27

Практическое задание 9.
Метод хорд

Теоретические положения.
Данный метод представляет собой модификацию метода Ньютона, в которой значение производной вычисляется только в точке начального приближения x_k. Тем самым расчетная формула для итераций приобретает вид:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$

Геометрически постоянное значение производной на каждой итерации означает, что наклон прямой, точка пересечения которой с осью абсцисс дает новое значение переменой x, остается постоянным.



Очевидно, что данная модификация приводит к уменьшению скорости сходимости. При этом условие ограничения применимости метода сходимости остается тем же самым (см. метод Ньютона):

$$\left| f(x) \cdot f''(x) \right| \le \left| f'(x) \right|^2$$

Порядок выполнения работы:
Необходимо найти корень уравнения из предыдущего задания:

$$e^x - 7 = 0$$

Анализ уравнения (см. предыдущее задание) показывает, что метод хорд применим для нахождения корня данного уравнения, причем единственный корень должен находиться в диапазоне [1, 3]. Взяв в качестве первого приближения значение x=1,5 и используя для расчетов формулу

$$x_{k+1} = x_k - (e^{x_k} - 7) / e^{1,5}$$

получим

D	E
1,5	2,06191
2,06191	1,8698
1,8698	1,98427
1,98427	1,92319
1,92319	1,95827
1,95827	1,93884
1,93884	1,94984
1,94984	1,94369
1,94369	1,94715
1,94715	1,94521
1,94521	1,9463
1,9463	1,94569
1,94569	1,94603
1,94603	1,94584
1,94584	1,94595
1,94595	1,94589
1,94589	1,94592
1,94592	1,9459
1,9459	1,94591
1,94591	1,94591
1,94591	1,94591
1,94591	1,94591
1,94591	1,94591
1,94591	1,94591
1,94591	1,94591

Формульное выражение

D	E
=1,5	=D1-(EXP(D1)-7)/EXP($D$1)
=E1	=D2-(EXP(D2)-7)/EXP($D$1)
=E2	=D3-(EXP(D3)-7)/EXP($D$1)
=E3	=D4-(EXP(D4)-7)/EXP($D$1)
=E4	=D5-(EXP(D5)-7)/EXP($D$1)
=E5	=D6-(EXP(D6)-7)/EXP($D$1)
=E6	=D7-(EXP(D7)-7)/EXP($D$1)
=E7	=D8-(EXP(D8)-7)/EXP($D$1)
=E8	=D9-(EXP(D9)-7)/EXP($D$1)
=E9	=D10-(EXP(D10)-7)/EXP($D$1)
=E10	=D11-(EXP(D11)-7)/EXP($D$1)
=E11	=D12-(EXP(D12)-7)/EXP($D$1)
=E12	=D13-(EXP(D13)-7)/EXP($D$1)
=E13	=D14-(EXP(D14)-7)/EXP($D$1)
=E14	=D15-(EXP(D15)-7)/EXP($D$1)
=E15	=D16-(EXP(D16)-7)/EXP($D$1)
=E16	=D17-(EXP(D17)-7)/EXP($D$1)
=E17	=D18-(EXP(D18)-7)/EXP($D$1)
=E18	=D19-(EXP(D19)-7)/EXP($D$1)
=E19	=D20-(EXP(D20)-7)/EXP($D$1)
=E20	=D21-(EXP(D21)-7)/EXP($D$1)
=E21	=D22-(EXP(D22)-7)/EXP($D$1)
=E22	=D23-(EXP(D23)-7)/EXP($D$1)
=E23	=D24-(EXP(D24)-7)/EXP($D$1)
=E24	=D25-(EXP(D25)-7)/EXP($D$1)

Как видим, необходимая точность решения по сравнению с предыдущим заданием была достигнута за большее число итераций. Тем не менее, необходимо отметить, что временные затраты на программирования алгоритма совпадают с временными затратами метода Ньютона, что, в принципе, стирает отличия между данными методами.

Задания для самостоятельной работы

Используя метод хорд, найдите корни уравнений из предыдущего задания с точностью до 0,000001.

Практическое задание 10.

Метод секущих

Теоретические положения.

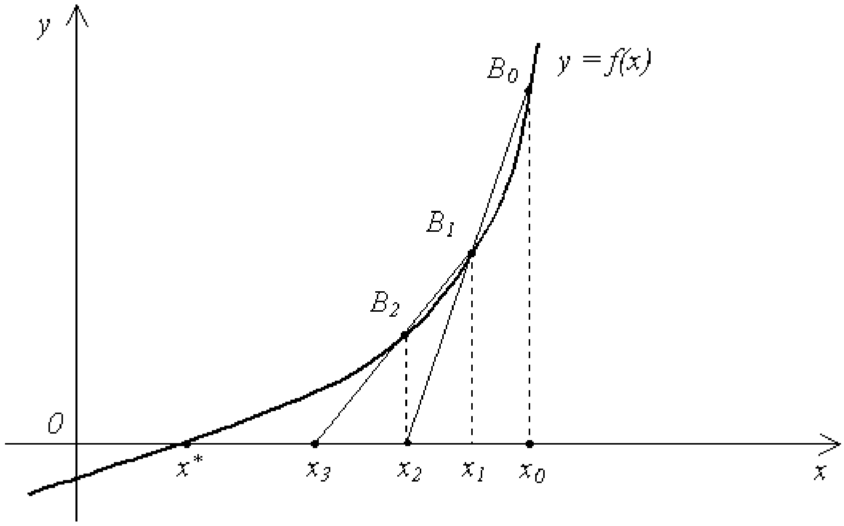
В методе Ньютона для нахождения значения последующего приближения требуется произвести расчет производной, для чего необходимо выразить функцию f(x) с помощью элементарных функций, что не всегда может быть реализовано. Однако этого требования можно легко избежать, заменяя производную разделенной разностью, т.е. заменяя касательную секущей

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Тем самым расчетная формула метода Ньютона приобретет следующий вид:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Геометрическая интерпретация метода показана на рисунке



Как видно из рисунка, функция f(x) аппроксимируется на каждом интервале линейной функцией.

В отличие от предыдущих методов для реализации первой итерации необходимо знать не только значение x_0, но и некоторое значение x_1, что приводит к некоторому произволу метода.

Итерации метода секущих сходятся к корню, если начальные величины x_0 и x_1 достаточно близки к корню. В случае сходимости метод секущих является довольно быстрым . Порядок сходимости равен золотому сечению 1,618. Тем самым порядок сходимости, в любом случае, больше линейного, но не квадратичен, как у похожего, рассмотренного выше метода Ньютона.

Для метода секущих довольно трудно сформулировать условия сходимости. Как было сказано выше, если начальные точки достаточно близки к корню, то метод, как правило, сходится. Тем не менее нет какого-то общего определения близости. Если производная функцию близка к нулю, то метод может расходиться.

Порядок выполнения работы:

Необходимо найти корень уравнения из предыдущих заданий:

$$e^x - 7 = 0$$

Анализ уравнения (см. предыдущие задания) показывает, что единственный корень должен находиться в диапазоне [1, 4]. Взяв в качестве $x_0 = 1$ и $x_1 = 3{,}9$, получим

	C	D	E	F	G	H
306			x0	x1	f'	x2
307			4	3,9	51,95701	3,128209
308			3,9	3,128209	34,42565	3,041693
309			3,128209	3,041693	21,87322	2,434782
310			3,041693	2,434782	15,69808	2,375971
311			2,434782	2,375971	11,0842	2,0481
312			2,375971	2,0481	9,17526	2,026441
313			2,0481	2,026441	7,669795	1,950958
314			2,026441	1,950958	7,307759	1,949067
315			1,950958	1,949067	7,028778	1,945923
316			1,949067	1,945923	7,011107	1,945915
317			1,945923	1,945915	7,000062	1,94591
318			1,945915	1,94591	7,000017	1,94591
319			1,94591	1,94591	7,000003	1,94591

Формульное выражение

	C	D	E	F	G	H
306			x0	x1	f'	x2
307			4	3,9	=(EXP(E307)-EXP(F307))/(E307-F307)	=E307-(EXP(E307)-7)/EXP(E307)
308			=F307	=H307	=(EXP(E308)-EXP(F308))/(E308-F308)	=E308-(EXP(E308)-7)/EXP(E308)
309			=F308	=H308	=(EXP(E309)-EXP(F309))/(E309-F309)	=E309-(EXP(E309)-7)/EXP(E309)
310			=F309	=H309	=(EXP(E310)-EXP(F310))/(E310-F310)	=E310-(EXP(E310)-7)/EXP(E310)
311			=F310	=H310	=(EXP(E311)-EXP(F311))/(E311-F311)	=E311-(EXP(E311)-7)/EXP(E311)
312			=F311	=H311	=(EXP(E312)-EXP(F312))/(E312-F312)	=E312-(EXP(E312)-7)/EXP(E312)
313			=F312	=H312	=(EXP(E313)-EXP(F313))/(E313-F313)	=E313-(EXP(E313)-7)/EXP(E313)
314			=F313	=H313	=(EXP(E314)-EXP(F314))/(E314-F314)	=E314-(EXP(E314)-7)/EXP(E314)
315			=F314	=H314	=(EXP(E315)-EXP(F315))/(E315-F315)	=E315-(EXP(E315)-7)/EXP(E315)
316			=F315	=H315	=(EXP(E316)-EXP(F316))/(E316-F316)	=E316-(EXP(E316)-7)/EXP(E316)
317			=F316	=H316	=(EXP(E317)-EXP(F317))/(E317-F317)	=E317-(EXP(E317)-7)/EXP(E317)
318			=F317	=H317	=(EXP(E318)-EXP(F318))/(E318-F318)	=E318-(EXP(E318)-7)/EXP(E318)
319			=F318	=H318	=(EXP(E319)-EXP(F319))/(E319-F319)	=E319-(EXP(E319)-7)/EXP(E319)

Рассмотренный выше метод можно интерпретировать как метод, в котором на каждой итерации исходная функция аппроксимируется линейной функцией, т.е. секущей. В принципе, используя идею аппроксимации, можно заменять искомую функцию полиномами второй, третьей и т.д. степени, Тем не менее, такие методы не находят практического применения по следующим причинам: 1) количество точек для первой итерации растет, 2) расчетная формула усложняется, 3)скорость сходимости и точность метода не повышаются, 4) возникает проблема нахождения необходимого корня многочлена, что для полиномов со степенью выше 2 вновь требует применения численных методов решения.

Задания для самостоятельной работы

Используя метод секущих, найдите корни уравнений из задания №8 с точностью до 0,00001.

Практическое задание 11.

Метод золотого сечения

Теоретические положения.

Данный метод относится к численным методам отыскания локального или безусловного экстремума (максимума или минимума) функции одной переменной.

Как и в случае нахождения корней уравнения, данная задача во многих случаях может быть решена с любой точностью путем прямого построения графика функции f(x) (см. практическое задание №4). Если функция f(x) выражена через элементарные функции, то ее экстремумы могут быть легко найдены путем нахождения корней уравнения f'(x)=0 при помощи описанных выше методов и проверки выполнения для данных точек условий существования в них экстремума. Тем не менее, для нахождения экстремума можно также использовать и другие методы, одним из которых является метод золотого сечения.

Пусть задана функция f(x) и пусть найден интервал неопределенности [a, b], на котором располагается экстремум этой функции. В методе золотого сечения для того, чтобы найти его положение на этом интервале (пусть это будет минимум), рассматриваемый отрезок разделяется в соотношении золотого сечения в обоих направлениях, то есть выбираются две точки x_1 и x_2 такие, что:

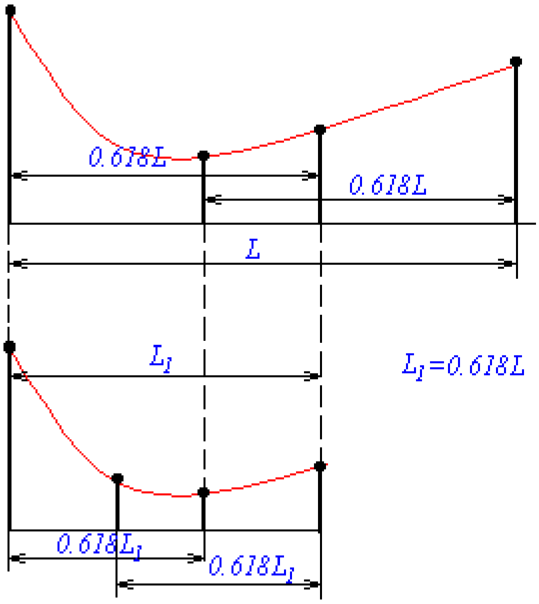
$$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-a}{x_2-a} = j = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots,$$

где φ – пропорция золотого сечения (см. рис.)

Таким образом:

$$x_1 = b - \frac{b-a}{j}; \quad .x_{21} = a + \frac{b-a}{j}$$

Следовательно, точки x_1 и x_2 делят отрезок [a, b] в пропорции золотого сечения. Это деление и используется для построения итерационного процесса. Рассчитаем значение функции в этих точках. При поиске минимума тот из концов отрезка [a, b], к которому среди двух вновь поставленных точек ближе оказалась та, значение в которой максимально, отбрасывают. Затем операция повторяется, причем на следующей итерации в силу показанного выше свойства золотого сечения надо искать всего одну новую точку. Процедуру продолжают до тех пор, пока концы нового отрезка не будут совпадать друг с другом с необходимой точностью. Графическая иллюстрация метода представлена на рисунке.



Поиск локального или глобального максимума осуществляется по полной аналогии за исключением диаметрально противоположного выбора новой концевой точки интервала неопределенности.

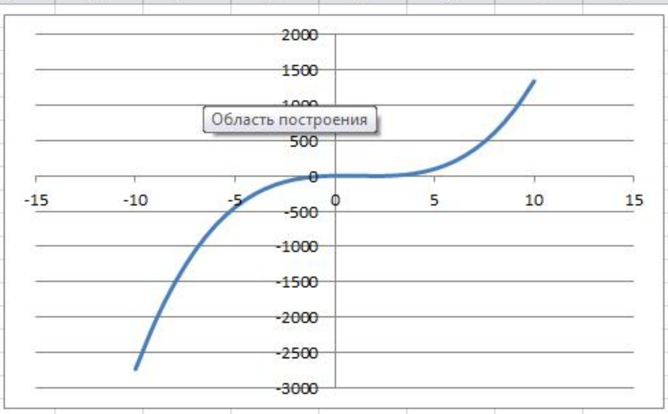
Порядок выполнения работы.

Необходимо найти локальный минимум функции

$$y = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 2$$

с точностью до одной тысячной. Очевидно, что, поскольку речь идет об уравнении третьего порядка с положительным коэффициентом при члене третьей степени, то речь может идти только о существовании одного локального минимума. Простой анализ функции показывает, что в связи с доминирующим влиянием кубического члена при больших по модулю значениях x локальный минимум может располагаться только вблизи нуля. И действительно, построение функции на интервале [-10, 10] дает:

	A	B
1	-10	-2738
2	-9	-2059
3	-8	-1502
4	-7	-1055
5	-6	-706
6	-5	-443
7	-4	-254
8	-3	-127
9	-2	-50
10	-1	-11
11	0	2
12	1	1
13	2	-2
14	3	5
15	4	34
16	5	97
17	6	206
18	7	373
19	8	610
20	9	929
21	10	1342



Тем самым в качестве интервала неопределенности может быть взят отрезок [0, 5].

Теперь можно реализовать алгоритм вычислений

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	b	x1	x2	f1	f2	a	b
2	0,0000	5,0000	1,9098	3,0902	-1,9608	6,5348	0,0000	3,0902
3	0,0000	3,0902	1,1803	1,9099	0,2579	-1,9609	1,1803	3,0902
4	1,1803	3,0902	1,9098	2,3607	-1,9608	-1,2554	1,1803	2,3607
5	1,1803	2,3607	1,6312	1,9099	-1,4202	-1,9609	1,6312	2,3607
6	1,6312	2,3607	1,9098	2,0821	-1,9608	-1,9652	1,9098	2,3607
7	1,9098	2,3607	2,0821	2,1885	-1,9652	-1,8089	1,9098	2,1885
8	1,9098	2,1885	2,0163	2,0821	-1,9987	-1,9652	1,9098	2,0821
9	1,9098	2,0821	1,9756	2,0163	-1,9971	-1,9987	1,9756	2,0821
10	1,9756	2,0821	2,0163	2,0414	-1,9987	-1,9913	1,9756	2,0414
11	1,9756	2,0414	2,0008	2,0163	-2,0000	-1,9987	1,9756	2,0163
12	1,9756	2,0163	1,9912	2,0008	-1,9996	-2,0000	1,9912	2,0163
13	1,9912	2,0163	2,0008	2,0067	-2,0000	-1,9998	1,9912	2,0067
14	1,9912	2,0067	1,9971	2,0008	-2,0000	-2,0000	1,9971	2,0067
15	1,9971	2,0067	2,0008	2,0030	-2,0000	-2,0000	1,9971	2,0030
16	1,9971	2,0030	1,9994	2,0008	-2,0000	-2,0000	1,9971	2,0008
17	1,9971	2,0008	1,9985	1,9994	-2,0000	-2,0000	1,9985	2,0008
18	1,9985	2,0008	1,9994	1,9999	-2,0000	-2,0000	1,9994	2,0008
19	1,9994	2,0008	1,9999	2,0002	-2,0000	-2,0000	1,9994	2,0002
20	1,9994	2,0002	1,9997	1,9999	-2,0000	-2,0000	1,9997	2,0002
21	1,9997	2,0002	1,9999	2,0000	-2,0000	-2,0000	1,9999	2,0002
22	1,9999	2,0002	2,0000	2,0001	-2,0000	-2,0000	1,9999	2,0001
23	1,9999	2,0001	2,0000	2,0000	-2,0000	-2,0000	2,0000	2,0001
24	2,0000	2,0001	2,0000	2,0000	-2,0000	-2,0000	2,0000	2,0000

Реализация в виде формул:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	b	x1	x2	f1	f2	a	b
2	0	5	=B2-(B2-A2)/1,618	=A2+(B2-A2)/1,618	=2*C2^3-7*C2^2+4*C2+2	=2*D2^3-7*D2^2+4*D2+2	=ЕСЛИ(E2>F2;C2;A2)	=ЕСЛИ(E2>F2;B2;D2)
3	=G2	=H2	=B3-(B3-A3)/1,618	=A3+(B3-A3)/1,618	=2*C3^3-7*C3^2+4*C3+2	=2*D3^3-7*D3^2+4*D3+2	=ЕСЛИ(E3>F3;C3;A3)	=ЕСЛИ(E3>F3;B3;D3)
4	=G3	=H3	=B4-(B4-A4)/1,618	=A4+(B4-A4)/1,618	=2*C4^3-7*C4^2+4*C4+2	=2*D4^3-7*D4^2+4*D4+2	=ЕСЛИ(E4>F4;C4;A4)	=ЕСЛИ(E4>F4;B4;D4)
5	=G4	=H4	=B5-(B5-A5)/1,618	=A5+(B5-A5)/1,618	=2*C5^3-7*C5^2+4*C5+2	=2*D5^3-7*D5^2+4*D5+2	=ЕСЛИ(E5>F5;C5;A5)	=ЕСЛИ(E5>F5;B5;D5)
6	=G5	=H5	=B6-(B6-A6)/1,618	=A6+(B6-A6)/1,618	=2*C6^3-7*C6^2+4*C6+2	=2*D6^3-7*D6^2+4*D6+2	=ЕСЛИ(E6>F6;C6;A6)	=ЕСЛИ(E6>F6;B6;D6)
7	=G6	=H6	=B7-(B7-A7)/1,618	=A7+(B7-A7)/1,618	=2*C7^3-7*C7^2+4*C7+2	=2*D7^3-7*D7^2+4*D7+2	=ЕСЛИ(E7>F7;C7;A7)	=ЕСЛИ(E7>F7;B7;D7)
8	=G7	=H7	=B8-(B8-A8)/1,618	=A8+(B8-A8)/1,618	=2*C8^3-7*C8^2+4*C8+2	=2*D8^3-7*D8^2+4*D8+2	=ЕСЛИ(E8>F8;C8;A8)	=ЕСЛИ(E8>F8;B8;D8)
9	=G8	=H8	=B9-(B9-A9)/1,618	=A9+(B9-A9)/1,618	=2*C9^3-7*C9^2+4*C9+2	=2*D9^3-7*D9^2+4*D9+2	=ЕСЛИ(E9>F9;C9;A9)	=ЕСЛИ(E9>F9;B9;D9)
10	=G9	=H9	=B10-(B10-A10)/1,618	=A10+(B10-A10)/1,618	=2*C10^3-7*C10^2+4*C10+2	=2*D10^3-7*D10^2+4*D10+2	=ЕСЛИ(E10>F10;C10;A10)	=ЕСЛИ(E10>F10;B10;D10)
11	=G10	=H10	=B11-(B11-A11)/1,618	=A11+(B11-A11)/1,618	=2*C11^3-7*C11^2+4*C11+2	=2*D11^3-7*D11^2+4*D11+2	=ЕСЛИ(E11>F11;C11;A11)	=ЕСЛИ(E11>F11;B11;D11)
12	=G11	=H11	=B12-(B12-A12)/1,618	=A12+(B12-A12)/1,618	=2*C12^3-7*C12^2+4*C12+2	=2*D12^3-7*D12^2+4*D12+2	=ЕСЛИ(E12>F12;C12;A12)	=ЕСЛИ(E12>F12;B12;D12)
13	=G12	=H12	=B13-(B13-A13)/1,618	=A13+(B13-A13)/1,618	=2*C13^3-7*C13^2+4*C13+2	=2*D13^3-7*D13^2+4*D13+2	=ЕСЛИ(E13>F13;C13;A13)	=ЕСЛИ(E13>F13;B13;D13)
14	=G13	=H13	=B14-(B14-A14)/1,618	=A14+(B14-A14)/1,618	=2*C14^3-7*C14^2+4*C14+2	=2*D14^3-7*D14^2+4*D14+2	=ЕСЛИ(E14>F14;C14;A14)	=ЕСЛИ(E14>F14;B14;D14)
15	=G14	=H14	=B15-(B15-A15)/1,618	=A15+(B15-A15)/1,618	=2*C15^3-7*C15^2+4*C15+2	=2*D15^3-7*D15^2+4*D15+2	=ЕСЛИ(E15>F15;C15;A15)	=ЕСЛИ(E15>F15;B15;D15)
16	=G15	=H15	=B16-(B16-A16)/1,618	=A16+(B16-A16)/1,618	=2*C16^3-7*C16^2+4*C16+2	=2*D16^3-7*D16^2+4*D16+2	=ЕСЛИ(E16>F16;C16;A16)	=ЕСЛИ(E16>F16;B16;D16)
17	=G16	=H16	=B17-(B17-A17)/1,618	=A17+(B17-A17)/1,618	=2*C17^3-7*C17^2+4*C17+2	=2*D17^3-7*D17^2+4*D17+2	=ЕСЛИ(E17>F17;C17;A17)	=ЕСЛИ(E17>F17;B17;D17)
18	=G17	=H17	=B18-(B18-A18)/1,618	=A18+(B18-A18)/1,618	=2*C18^3-7*C18^2+4*C18+2	=2*D18^3-7*D18^2+4*D18+2	=ЕСЛИ(E18>F18;C18;A18)	=ЕСЛИ(E18>F18;B18;D18)
19	=G18	=H18	=B19-(B19-A19)/1,618	=A19+(B19-A19)/1,618	=2*C19^3-7*C19^2+4*C19+2	=2*D19^3-7*D19^2+4*D19+2	=ЕСЛИ(E19>F19;C19;A19)	=ЕСЛИ(E19>F19;B19;D19)
20	=G19	=H19	=B20-(B20-A20)/1,618	=A20+(B20-A20)/1,618	=2*C20^3-7*C20^2+4*C20+2	=2*D20^3-7*D20^2+4*D20+2	=ЕСЛИ(E20>F20;C20;A20)	=ЕСЛИ(E20>F20;B20;D20)
21	=G20	=H20	=B21-(B21-A21)/1,618	=A21+(B21-A21)/1,618	=2*C21^3-7*C21^2+4*C21+2	=2*D21^3-7*D21^2+4*D21+2	=ЕСЛИ(E21>F21;C21;A21)	=ЕСЛИ(E21>F21;B21;D21)
22	=G21	=H21	=B22-(B22-A22)/1,618	=A22+(B22-A22)/1,618	=2*C22^3-7*C22^2+4*C22+2	=2*D22^3-7*D22^2+4*D22+2	=ЕСЛИ(E22>F22;C22;A22)	=ЕСЛИ(E22>F22;B22;D22)
23	=G22	=H22	=B23-(B23-A23)/1,618	=A23+(B23-A23)/1,618	=2*C23^3-7*C23^2+4*C23+2	=2*D23^3-7*D23^2+4*D23+2	=ЕСЛИ(E23>F23;C23;A23)	=ЕСЛИ(E23>F23;B23;D23)
24	=G23	=H23	=B24-(B24-A24)/1,618	=A24+(B24-A24)/1,618	=2*C24^3-7*C24^2+4*C24+2	=2*D24^3-7*D24^2+4*D24+2	=ЕСЛИ(E24>F24;C24;A24)	=ЕСЛИ(E24>F24;B24;D24)

В целях упрощения программирования задачи построение двойного золотого сечения использовалось на каждом шагу.

В качестве проверки легко посчитать производную от этой функции, приравнять ее нулю и найти корни уравнения, после чего подставить полученное значение переменной в исходное выражение.

Задания для самостоятельной работы

Используя метод золотого сечения, с точностью до одной десятитысячной локальные минимумы следующих функций:

Вариант	Функция
1	$y = 3x^3 - 60x^2 - 15x + 7$
2	$y = 3x^3 - 40x^2 - 15x + 7$
3	$y = 2x^3 - 40x^2 - 15x + 7$
4	$y = 3x^3 - 40x^2 - 15x + 35$
5	$y = x^3 - 40x^2 - 15x + 15$
6	$y = 4x^3 - 40x^2 - 15x + 15$
7	$y = 4x^3 - 60x^2 - 15x + 15$
8	$y = 3x^3 - 70x^2 - 15x + 15$
9	$y = 2x^3 - 70x^2 - 15x + 15$
10	$y = 3x^3 - 80x^2 - 25x + 18$

Примечание

Метод золотого сечения получил свое название в честь древнегреческого скульптора и архитектора Фидия (отсюда использование в методе греческой буквы фи). Исторически золотым сечением именовалось деление отрезка AB точкой C на две части (меньший отрезок AC и больший отрезок BC), чтобы для длин отрезков имело место соотношение AC/BC = BC/AB. Тем самым, золотое сечение делит отрезок на две неравные части так, что большая часть отрезка составляет такую же долю в целом отрезке, какую меньшая часть отрезка составляет в его большей части. Золотое сечение имеет множество замечательных свойств, но, кроме того, ему приписывают и многие вымышленные свойства.

Практическое задание 12.

Интерполяция функции в виде линейной комбинации базовых функций

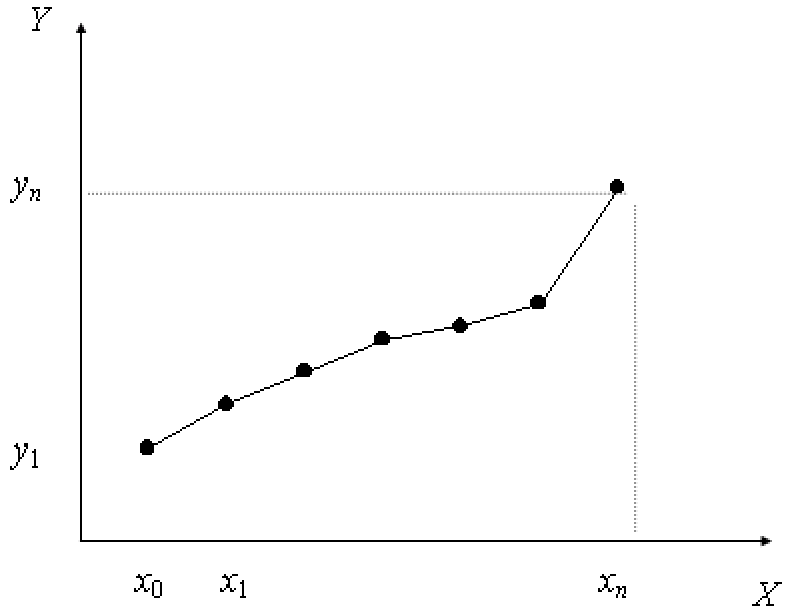
Теоретические положения.

На практике часто возникает необходимость на основании конечного числа экспериментальных, называемых узлами точек с координатами x_i и y_i построить приближающую функцию таким образом, чтобы она обязательно проходила через эти узлы. Данный способ построения приближающей функции получил название интерполяции или Лагранжевой интерполяции. Наряду с описанным выше случаем задача интерполяции также может возникнуть при замене сложной с точки зрения вычислений функции на более простую, а также в рамках численного дифференцирования и интегрирования.

Пусть на интервале $[x_0, x_n]$ заданы $n+1$ точки x_i $(i=0, 1,\ldots n)$ и значения некоторой интерполируемой функции $y=f(x)$ в этих точках $y=f(x)$: $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$.

$$y_0 = f(x_0); \quad y_1 = f(x_1); \quad \ldots; \quad y_n = f(x_n).$$

Возникает задача построения некоторой, проходящей через узлы и относительно просто вычислимой аналитической функции, которая значения аргумента, не совпадающего с узлом. При этом, если значение аргумента x расположено между узлами $x_i \le x \le x_{i+1}$, то нахождение приближенного значения функции $f(x)$ называется *интерполяцией* , а если x лежит вне интервала $[x_0, x_n]$, то процесс называют *экстраполяцией*. Графически задача интерполирования представлена на следующем рисунке:



Одним из наиболее простых и эффективных методов решения данной задачи является метод линейной интерполяции, в котором приближающая функция ищется в виде линейной комбинации некоторых независимых базовых функций (степени переменной разного порядка от 1 до n, тригонометрические функции и т.п.)

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \varphi_i(x)$$

с неизвестными коэффициентами a_i, обеспечивающим совпадение приближающей функции y и неизвестной экспериментальной функции согласно названному выше требованию Лагранжевой интерполяции

$$y_i = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \varphi_i(x_i)$$

Поскольку значения x_i и y_i известны, а значение $\varphi_i(x_i)$ может быть легко подсчитано для соответствующей базовой функции, что данное выражение может быть интерпретирована как система из n+1 линейных уравнений с неизвестными переменными a_i. Решив соответствующую систему уравнений одним из описанных выше методов (см. практические задания 1-3), можно легко получить соответствующий интерполяционный многочлен. a_i

Необходимо отметить, что данный метод, в принципе, может быть применен к любому числу узлов. Однако уже в случае применения, например, полиномов для пяти узлов приближающая функция будет представлять собой полином 4-й степени, интерпретация которого с точки зрения законов естественных наук вряд ли будет возможна. Кроме этого, данный полином невозможно будет использовать для экстраполяции. В связи с этим рекомендуется последовательное применение метода для следующих друг за другом групп из небольшого числа узлов.

Порядок выполнения работы.

Необходимо осуществить интерполяцию с помощью полинома первой и второй степени для следующих узлов

x_i	y_i
1	2
2	4
3	5
4	7
5	11
6	12

Простейшим видом интерполяции является линейная интерполяция. Она состоит в том, что соседние узлы соединяются прямолинейными отрезками, так что приближающую функцию $f(x)$ можно представить как ломаную линию. Уравнения каждого отрезка ломаной в общем случае будут различными. Поскольку имеется n интервалов (x_i, x_{i+1}), то для каждого из них в качестве уравнения интерполяционного многочлена требуется найти уравнение прямой, проходящей через два узла. Как известно, уранение прямой, проходящей через две точки с координатами (x_{i-1},y_{i-1}) и (x_i,y_i) может быть представлено в следующем виде

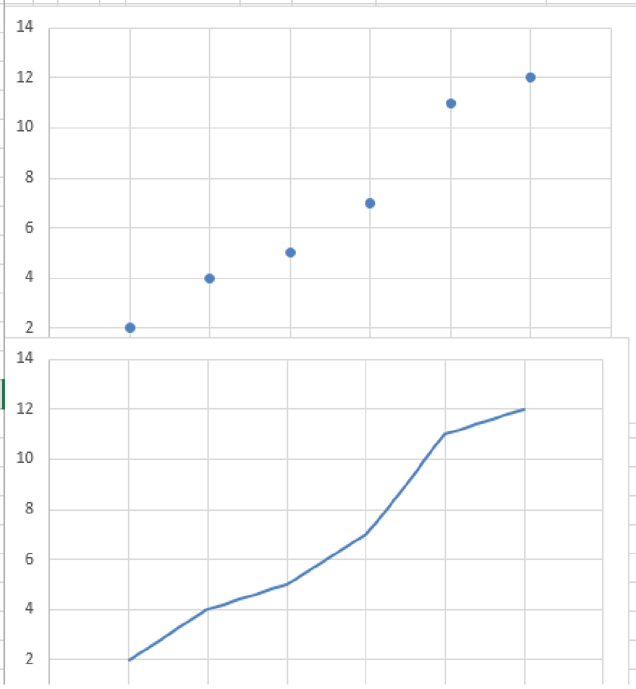
$$\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Отсюда имеем

$$y = a_i x + b_i, \quad a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad b_i = y_i - a_i x_i$$

Практическая реализация данного метода дает:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	xi	yi		ai=	2	bi=	0		1	2
2	1	2			1		2		1,2	2,4
3	2	4			2		-1		1,4	2,8
4	3	5			4		-9		1,6	3,2
5	4	7			1		6		1,8	3,6
6	5	#			2		0		2	4
7	6	#							2,2	4,2
8									2,4	4,4
9									2,6	4,6
10									2,8	4,8
11									3	5
12									3,2	5,4
13									3,4	5,8
14									3,6	6,2
15									3,8	6,6
16									4	7
17									4,2	7,8
18									4,4	8,6
19									4,6	9,4
20									4,8	10,2
21									5	11
22									5,2	11,2
23									5,4	11,4
24									5,6	11,6
25									5,8	11,8
26									6	12



Формульное выражение

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	xi	yi		ai=	=(B3-B2)/(A3-A2)	bi=	=B2-E1*A2		1	=$E$1*I1+$G$1
2	1	2			=(B4-B3)/(A4-A3)		=B3-E2*A3		1,2	=$E$1*I2+$G$1
3	2	4			=(B5-B4)/(A5-A4)		=B4-E3*A4		1,4	=$E$1*I3+$G$1
4	3	5			=(B6-B5)/(A6-A5)		=B5-E4*A5		1,6	=$E$1*I4+$G$1
5	4	7			=(B7-B6)/(A7-A6)		=B6-E5*A6		1,8	=$E$1*I5+$G$1
6	5	11			=(B8-B7)/(A8-A7)		=B7-E6*A7		2	=$E$1*I6+$G$1
7	6	12							2,2	=I7*$E$2+$G$2
8									2,4	=I8*$E$2+$G$2
9									2,6	=I9*$E$2+$G$2
10									2,8	=I10*$E$2+$G$2
11									3	=I11*$E$2+$G$2
12									3,2	=I12*$E$3+$G$3
13									3,4	=I13*$E$3+$G$3
14									3,6	=I14*$E$3+$G$3
15									3,8	=I15*$E$3+$G$3
16									4	=I16*$E$3+$G$3
17									4,2	=$E$4*I17+$G$4
18									4,4	=$E$4*I18+$G$4
19									4,6	=$E$4*I19+$G$4
20									4,8	=$E$4*I20+$G$4
21									5	=$E$4*I21+$G$4
22									5,2	=I22*$E$5+$G$5
23									5,4	=I23*$E$5+$G$5
24									5,6	=I24*$E$5+$G$5
25									5,8	=I25*$E$5+$G$5
26									6	=I26*$E$5+$G$5

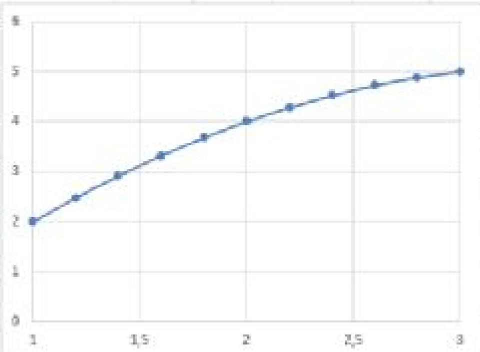
Столбцы I и K использовались с целью построения нижнего графика и расчета значений функции в промежуточных точках с шагом 0,2.

В случае интерполяции полиномом второй степени задача сводится к решению системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$y_i = a \cdot x_i^2 + b \cdot x + c, \qquad i = 1,2,3$$

Практическая реализация для первых трех точек будет иметь вид

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	xi	yi		система											
2	1	2		уравнений	1	1	1	2			1	1	1		
3	2	4			4	2	1	4			4	2	1	===	-2
4	3	5			9	3	1	5		Δ=	9	3	1		
5	4	7			16	4	1	7							
6	5	11			25	5	1	11			2	1	1		
7	6	12			36	6	1	12			4	2	1	===	1
8										Δx=	5	3	1		
9	расчет														
10	1	2			a=	-0,5					1	2	1		
11	1,2	2,48			b=	3,5					4	4	1	===	-7
12	1,4	2,92			c=	-1				Δy=	9	5	1		
13	1,6	3,32													
14	1,8	3,68									1	1	2		
15	2	4									4	2	4	===	2
16	2,2	4,28								Δz=	9	3	5		
17	2,4	4,52													
18	2,6	4,72													
19	2,8	4,88													
20	3	5													
21															
22															
23															
24															
25															
26															
27															



Формульное выражение

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	xi	yi		система											
2	1	2		уравнений	=A2*A2	=A2	=1	=B2			=E2	=F2	=G2		
3	2	4			=A3*A3	=A3	=1	=B3			=E3	=F3	=G3	===	=МОПРЕД(K2:M4)
4	3	5			=A4*A4	=A4	=1	=B4		Δ=	=E4	=F4	=G4		
5	4	7			=A5*A5	=A5	=1	=B5							
6	5	11			=A6*A6	=A6	=1	=B6			=H2	=F2	=G2		
7	6	12			=A7*A7	=A7	=1	=B7			=H3	=F3	=G3	===	=МОПРЕД(K6:M8)
8										Δx=	=H4	=F4	=G4		
9	расчет														
10	1	=$F$10*A10*A10+A1			a=	=O7/O3					=E2	=H2	=G2		
11	1,2	=$F$10*A11*A11+A1			b=	=O11/O3					=E3	=H3	=G3	===	=МОПРЕД(K10:M12)
12	1,4	=$F$10*A12*A12+A1			c=	=O15/O3				Δy=	=E4	=H4	=G4		
13	1,6	=$F$10*A13*A13+A1													
14	1,8	=$F$10*A14*A14+A1									=E2	=F2	=H2		
15	2	=$F$10*A15*A15+A1									=E3	=F3	=H3	===	=МОПРЕД(K14:M16)
16	2,2	=$F$10*A16*A16+A1								Δz=	=E4	=F4	=H4		
17	2,4	=$F$10*A17*A17+A1													
18	2,6	=$F$10*A18*A18+A1													
19	2,8	=$F$10*A19*A19+A1													
20	3	=$F$10*A20*A20+A2													
21															

Для решения системы уравнений был использован метод Крамера (при желании может быть использован любой из прочих методов решения систему линейных уравнений).

Расчеты и построение для последующих узлов рекомендуется выполнить самостоятельно. При этом необходимо обратить внимание на то, что, поскольку второй расчет охватит узлы 3-5, то для интерполирования функции между 5-м и 6-м узлом потребуется расчет для тройки узлов 4-6. Тем самым 4-й и 5-й узлы будут включены сразу в два расчета.

В задании использовались равноотстоящие узлы. Однако в общем случае шаг таблицы с узлами может быть неравномерным.

Задания для самостоятельной работы

Осуществите интерполяцию и найдите интерполирующие функции, используя линейную и квадратичную интерполяции для следующих точек:

Вариант								
1	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	1	3	4	6	9	12	16
2	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	1	2	4	5	7	9	10
3	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	1	2	2,3	3	4	5	6
4	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	1	3	4	7	8	11	12
5	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	1	3	5	7	10	12	14
6	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	1	2	4	7	12	16	21
7	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	1	3	5	6	8	9	12
8	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	1	2	4,5	6	8	9	13
9	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	1	2	5	6	7	9	13
10	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	1	2	4	7	8	11	14

Практическое задание 13.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теоретические положения.

Предположим, что функция f(x) задана таблично.

x	$x_0 \quad x_1 \,.\,.\,.\,.\, x_n$
$f(x)$	$y_0 \quad y_1 \,.\,.\,.\,.\, y_n$

В общем случае можно считать, что узлы не являются равноотстоящими (шаг таблицы неравномерный).

Построим интерполяционный многочлен на отрезке $[x_0, x_n]$ в виде

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + . . . + a_nx^n .$$

Геометрически задача сводится к построению полинома порядка n, проходящего через узлы. Очевидно, что для определения коэффициентов такого многочлена необходимо располагать n+1 узловой точкой.

Лагранж предложил следующую форму интерполяционного полинома

$$Pn(x) = \sum_{i=0}^{n} Y_i \cdot L_i(x)$$

где $L_i(x)$ - множитель Лагранжа. Очевидно, что для прохождения полинома через узлы i-тый множитель Лагранжа должен быть равен 1 для i-того узла и 0 для всех прочих узлов. Очевидно, что если речь идет об интерполяции полиномом n-ой степени, то множитель Лагранжа также должен быть многочленом этой же степени. Поэтому Лагранж предложил следующий вид

этого полинома:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

Тем самым интерполяционный полином Лагранжа может быть описан следующей формулой:

$$Pn\,(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \left(\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right).$$

В частности, для четырех узлов (n=3) интерполяционный полином Лагранжа 3-го порядка примет следующий вид:

$$\begin{aligned} L_3(x) = {} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 + \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3 \end{aligned} \qquad (*)$$

К основным достоинствам данной формы записи интерполяционного многочлена относятся:

- число арифметических операций, требующихся для расчета данного полинома, будет минимальным по сравнению с другими методами;

- формула в явном виде содержит значения приближаемой функции в узлах;

- алгоритм применим как для равноотстоящих, так и неравноотстоящих узлов;

- форма записи удобна в случае изменения значений функции в узлах при сохранении их координат.

Основным недостатком метода является необходимость изменения рабочей формулы при изменении числа узлов.

Как и в случае предыдущего метода, необходимо отметить, что он, в принципе, может быть применен к любому числу узлов. Однако уже в случае пяти узлов приближающая функция будет представлять собой полином 4-й степени, интерпретация которого с точки зрения законов естественных наук вряд ли будет возможна. Кроме этого, данный полином невозможно будет использовать для экстраполяции. В связи с этим рекомендуется последовательное применение метода для следующих друг за другом групп из небольшого числа узлов.

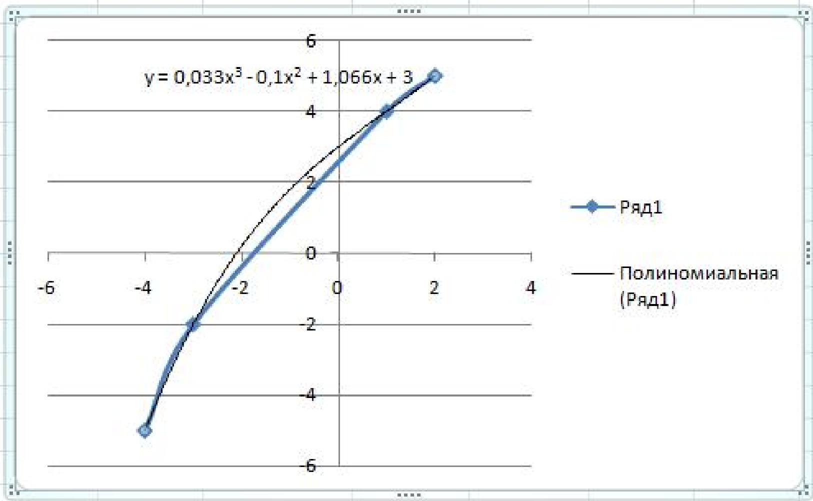
Порядок выполнения работы.

Необходимо осуществить интерполяцию с помощью полинома Лагранжа для следующих узлов

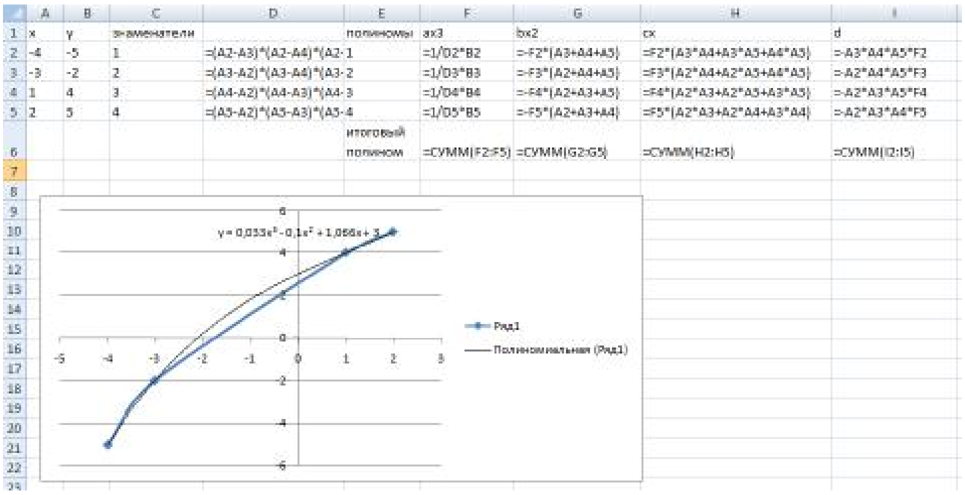
	4	3		
	5	2		

Для упрощении расчетов вначале посчитаем знаменатели дробей в формуле (*), затем получим выражения для полиномов третье степени на месте каждой дроби, после чего путем суммирования четырех полиномов получим итоговый полином

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	y	знаменатели		полиномы	ax3	bx2	cx	d
2	-4	-5	1	-30	1	0,166667	0	-1,16667	1
3	-3	-2	2	20	2	-0,1	-0,1	1	-0,8
4	1	4	3	-20	3	-0,2	-1	0,4	4,8
5	2	5	4	30	4	0,166667	1	0,833333	-2
6					итоговый полином	0,033333	-0,1	1,066667	3



Формульное выражение:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	y	знаменатели		полиномы	ax3	bx2	cx	d
2	-4	-5	1	=(A2-A3)*(A2-A4)*(A2-	1	=1/D2*B2	=-F2*(A3+A4+A5)	=F2*(A3*A4+A3*A5+A4*A5)	=-A3*A4*A5*F2
3	-3	-2	2	=(A3-A2)*(A3-A4)*(A3-	2	=1/D3*B3	=-F3*(A2+A4+A5)	=F3*(A2*A4+A2*A5+A4*A5)	=-A2*A4*A5*F3
4	1	4	3	=(A4-A2)*(A4-A3)*(A4-	3	=1/D4*B4	=-F4*(A2+A3+A5)	=F4*(A2*A3+A2*A5+A3*A5)	=-A2*A3*A5*F4
5	2	5	4	=(A5-A2)*(A5-A3)*(A5-	4	=1/D5*B5	=-F5*(A2+A3+A4)	=F5*(A2*A3+A2*A4+A3*A4)	=-A2*A3*A4*F5
6					итоговый полином	=СУММ(F2:F5)	=СУММ(G2:G5)	=СУММ(H2:H5)	=СУММ(I2:I5)

Задания для самостоятельной работы

Осуществите интерполяцию Лагранжа для следующих узлов:

1	**X**	-1	1	2	3	6
	Y	0	4	5	7	11

2	**X**	-2	1	2	3	6
	Y	1	4	5	7	9

3	**X**	-1	0	3	4	6
	Y	0	4	5	7	11

4	**X**	-1	0	1	3	6
	Y	0	4	6	7	11

5	**X**	-2	0	2	3	6
	Y	0	4	5	78	11

6	**X**	-1	0	2	3	6
	Y	0	3	5	7	9

7	**X**	-2	-1	2	3	6
	Y	0	4	5	7	11

8	**X**	-1	1	2	3	6
	Y	2	4	5	7	13

9	**X**	-1	0	1	2	5
	Y	0	4	5	7	8

10	**X**	-1	1	2	3	6
	Y	0	4	6	7	9

Практическое задание 14.
Интерполяционный многочлен Ньютона

Теоретические положения.
Рассмотрим вновь задачу интерполяции функции f(x), заданной таблично

x	x_0 x_1 . . . . x_n
f (x)	$f(x_0)$ $f(x_1)$. . .$f(x_n)$

В общем случае можно считать, что узлы не являются равноотстоящими (шаг таблицы неравномерный). Необходимо получить интерполяционный многочлен, проходящий через указанные в таблице узлы. Предложенный Ньютоном интерполяционный многочлен, конечно же, после простых преобразований с целью приведения к стандартной конечной форме

$$y=x^n+bx^{n-1}+\ldots..$$

будет иметь тот же самый вид, что и в случае его расчета с помощью алгоритмов, описанных в двух предыдущих заданиях (следствие единственности из свойства интерполяционного многочлена: через две точки можно провести одну прямую, через три точки - одну параболу и т.д.). Тем не менее, предложенная Ньютоном форма записи имеет ряд достоинств по сравнению с интерполяционным многочленом Лагранжа, как, например, простота его дифференцирования.

Для вывода интерполяционного многочлена Ньютона введем разделенные разности порядка n. Разделенные разности нулевого порядка совпадают со значениями приближаемой функции в узлах. Разделенные разности первого порядка выражаются через разделенные разности нулевого порядка

$$f(x_i,x_j)=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$$

Разделенные разность второго порядка выражается через разделенные разности первого порядка

$$f(x_i,x_j,x_k)=\frac{f(x_i,x_j)-f(x_j,x_k)}{x_i-x_k}$$

Разделенная разность порядка n определяется при помощи разделенных разностей предыдущего порядка по формуле

$$f(x_i,x_j,x_k,\ldots..x_n)=\frac{f(x_i,x_j,x_k,\ldots..x_{n-1})-f(x_j,x_k,\ldots..x_n)}{x_i-x_n}$$

Исходя из данной формулы, для n+1 узлов могут быть построены разделенные разности до порядка n.

С помощью разделенных разностей может быть получена удобная формула для расчета интерполяционного многочлена. Возьмем разделенную разность $f(x,x_0)$

$$f(x,x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Выразим из данной формулы f(x)

$$f(x)=f(x,x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Возьмем разделенную разность $f(x,x_0,x_1)$

$$f(x,x_0,x_1)=\frac{f(x,x_0)-f(x_0,x_1)}{x-x_1}$$

Выражая из данной формулы $f(x,x_0)$, получим для f(x)

$$f(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x,x_0,x_1)(x-x_0)(x-x_1)$$

Повторяя данную операцию, получим интерполяционный многочлен Ньютона в форме

$$f(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x,x_0,x_1)(x-x_0)(x-x_1)+$$
$$.........+(x-x_0).......(x-x_n)f(x,x_0,x_1,......x_n)$$

Формулой Ньютона удобно пользоваться при интерполировании функции с изменяющейся сеткой узлов: при добавлении нового узла x_{n+1} потребуется вычислить только одно новое слагаемое

$$\left(x-x_0\right)\ \mathbf{K}\ \left(x-x_n\right) f\left(x_0, x_1, \mathbf{K}, x_{n+1}\right)$$

и добавить его к предыдущей сумме.

Как уже было отмечено выше, алгоритм для любого конечного числа узлов. Однако для числа узлов n приближающая функция будет представлять полином степени n-1, интерпретация которого с точки зрения законов естественных наук вряд ли будет возможна в случае большого n. Кроме этого, данный полином невозможно будет применить для экстраполяции функции. В связи с этим рекомендуется последовательное применение метода для следующих друг за другом групп из небольшого числа узлов. В связи с этим ниже приводятся расчетные формулы только для двух и трех узлов

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{f(x_0)-f(x_1)}{(x_0-x_1)}$$

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{f(x_0)-f(x_1)}{(x_0-x_1)}+(x-x_0)(x-x_1)\frac{\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{(x_0-x_1)}-\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{(x_1-x_2)}}{(x_0-x_2)}$$

Порядок выполнения работы.

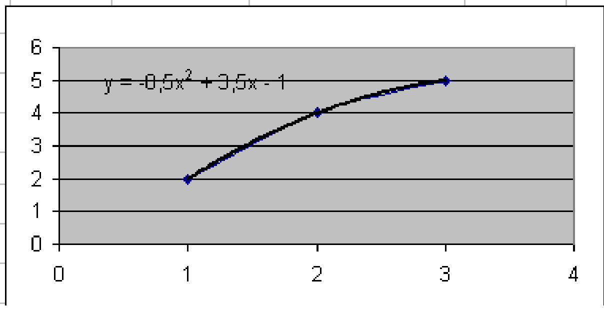
Необходимо осуществить интерполяцию с помощью полинома Ньютона второй степени для следующих узлов

x_i	y_i
1	2
2	4
3	5
4	7

	1
5	1

Выделим две группы узлов (1-ый-3-й и 3-й-5-й) и проведем расчеты по отдельности для каждой группы узлов. Расчет для первых трех узлов дает:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x_i	y_i	полином	f(x0)	(f(xo)-f(x1))/ (x0-x1)	((f(xo)-f(x1))/ (x0-x1)-(f(x1)-f(x2))/ (x1-x2))/(x0-x2)	a=	b=	c=
2	1	2		1	2	-0,5	-0,5	3,5	-1
3	2	4							
4	3	5							
5									
6									
7									
8									
9									
10									

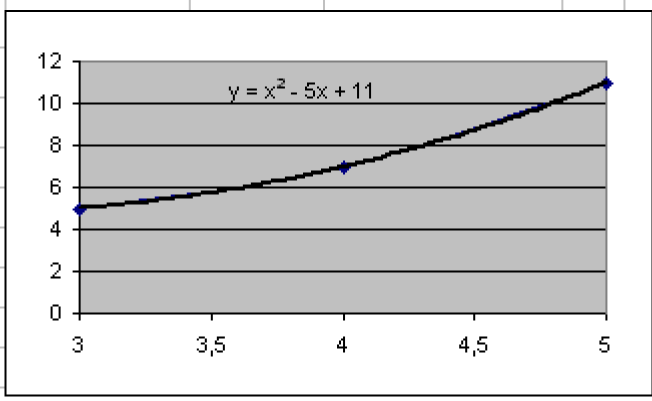


Формульное выражение

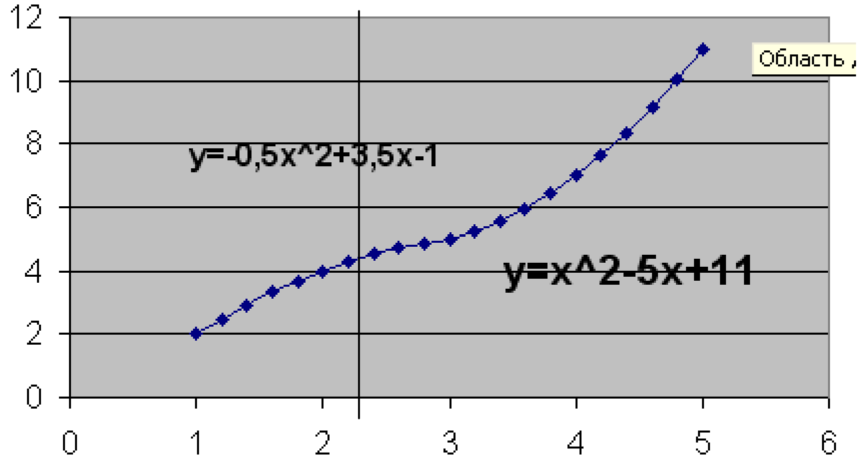
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x_i	y_i	полином	f(x0)	(f(xo)-f(x1))/ (x0-x1)	((f(xo)-f(x1))/ (x0-x1)-(f(x1)-f(x2))/ (x1-x2))/(x0-x2)	a=	b=	c=
2	1	2		=A2	=(B2-B3)/(A2-A3)	=(E2-(B3-B4)/(A3-A4))/(A2-A4)	=F2	=E2-A2*F2-F2*A3	=B2-A2*E2+A2*A3*F2
3	2	4							
4	3	5							

Аналогичные расчеты для второй группы узлов дают

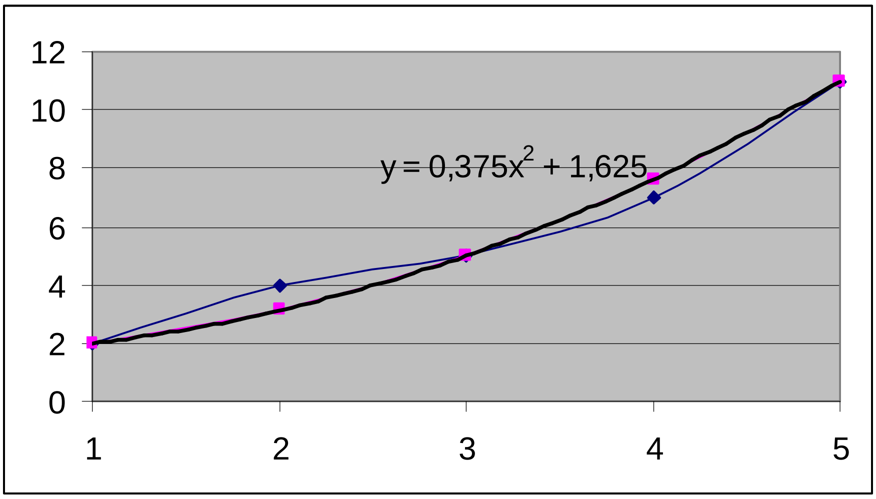
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
16									
17	x_i	y_i	полином	f(x0)	(f(xo)-f(x1))/ (x0-x1)	((f(xo)-f(x1))/ (x0-x1)-(f(x1)-f(x2))/ (x1-x2))/(x0-x2)	a=	b=	c=
18	3	5		3	2	1	1	-5	11
19	4	7							
20	5	11							
21									
22									
23									
24									
25									
26									
27									
28									



Итоговый результат расчетов представлен на приведенном ниже рисунке:



Любопытно отметить, что хотя проведенная интерполяция позволяет рассчитать значения в промежуточных, лежащих между узлами точках, тем не менее, наблюдается значительное по величине (и даже по знаку) расхождение в значениях коэффициентов перед степенями для первого и второго интерполяционного полинома Ньютона. В связи с этим также рекомендуется провести расчет на основании 1-го, 3-го и 5-го узлов. результаты данного расчета приводят к следующему результату.



Вопрос о преимуществах и недостатках использованных методов моделирования остается открытым и может быть решен только в рамках фактических измерений соответствующих процессов.

Задания для самостоятельной работы.

Осуществите интерполяцию для следующих узлов из предыдущего задания, используя интерполяционный полином Ньютона третьего порядка.

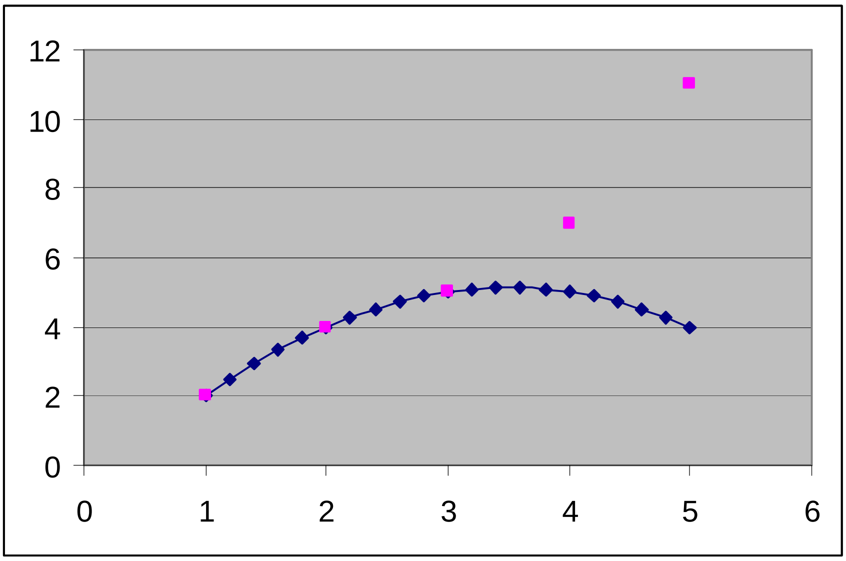
Практическое задание 15.

Приближение методом наименьших квадратов

Теоретические положения.

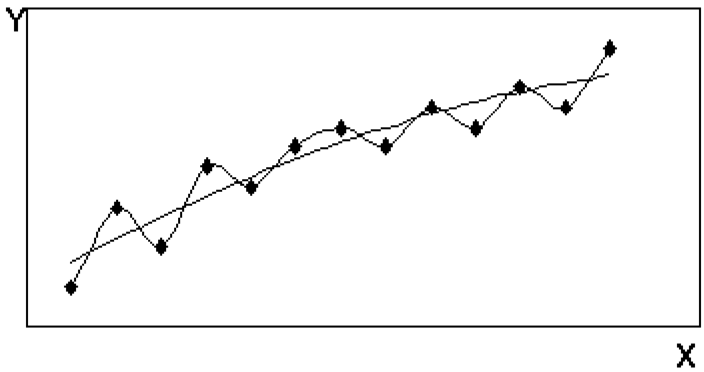
В предыдущих заданиях был рассмотрен один из часто используемых способов приближения функции к табличным данным - интерполяция

Лагранжа с помощью полиномиальной функции степени n при наличии в таблице n+1 узлов. Тем самым отсюда вытекает первый недостаток данного подхода: если для интерполяции табличных данных необходимо будет использовать полином меньшей степени, что часто встречается на практике, то в силу единственности полинома степени n, проходящего через n+1 узлов уже нельзя будет подобрать коэффициенты полинома так, чтобы он проходил через каждый узел. В лучшем случае он будет проходить через несколько узлов, располагаясь относительно близко к другим узлам (см. предыдущее задание). Другим значительным недостаткам метода является невозможность использования в большинстве случаев интерполирующей функции для экстраполяции, как это наглядно показывает следующий пример:



Из рисунка видно, что интерполирующая функция (интерполяция по первым трем узлам) позволяет достичь совпадения значений приближаемой и приближающей функции в узлах, однако использование приближающей функции для экстраполяции вправо дает неверный в корне результат.

Иным подходом к аппроксимированию приближаемой функции является метод, когда искомая приближающая функция максимально близко располагается к узлам, а сумма квадратов отклонений экспериментальных значений y_i от соответствующих значений, вычисленных на основе приближающей функции, будет минимальной (см. рисунок)



Использование квадратов отклонений вызвано тем, что в случае обычного расчета отклонений положительные и отрицательные значения могут взаимно скомпенсировать друг друга, что приведет к тому, что даже при больших расхождениях для экспериментальных и расчетных точек может получиться суммарное значение отклонений, близкое к нулю. В связи с этим данный метод приближения получил название метода наименьших квадратов.

Казалось бы, с помощью описанных выше методов интерполяции можно более точно описать экспериментальные данные. Тем не менее, на практике очень часто возникают ситуации, когда метод наименьших квадратов будет более предпочтительным. Наряду с названными выше недостатками рассмотренных выше методов интерполяции (интерполяция полиномом более низкого порядка и невозможность экстраполяции) необходимо упомянуть следующие часто встречающиеся на практике ситуации:

1. Количество экспериментальных значений очень велико. В этом случае интерполирующий полином будет иметь высокий порядок, что невозможно будет объяснить с точки зрения законов естественных наук. Кроме того, расчеты с помощью этого полинома будут довольно громоздкими. Удобнее выбрать более простую, элементарную функцию (полином второй или третье степени, натуральный логарифм, экспоненту и т.п.), даже если она будет описывать экспериментальные результаты менее точно.

2. Вид экспериментальной функции заранее определен. Например, многие законы естественных наук подчиняются экспоненциальной или логарифмической зависимости.

3. Приближающая по методу наименьших квадратов функция, в отличие от интерполирующей функции, может сглаживать погрешности эксперимента, как это показано на представленном выше рисунке. Очевидно, что экспериментальная функция монотонно возрастает с увеличением x, а разброс экспериментальных данных объясняется погрешностью измерений. Интерполирующая по Лагранжу функция, проходя через каждую экспериментальную точку, будет повторять ошибки эксперимента, что приведет к тому, что она будет иметь множество локальных экстремумов.

4. Интерполирующей по Лагранжу функцией невозможно описать экспериментальные данные, в которых есть несколько точек с одинаковым значением аргумента. А такая ситуация возможна, если одно и то же измерение проводится несколько раз. Однако это не является ограничением для использования метода наименьших квадратов, где нет требования прохождения приближающей функции через каждую точку.

Рассмотрим математический аппарат метода наименьших квадратов. Пусть, изучая некую функциональную зависимость $y=f(x)$, был получен следующий результат измерений величин x и y.

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Задача состоит в аппроксимации данной неизвестной зависимости между x и y с помощью некоторой приближающей функции:

$$y(x) = \tilde{f}(x; a_0, a_1, \dots, a_m),$$

где m - число параметров;

$a_1 \ldots a_m$ - неизвестные коэффициенты.

Идея метода наименьших квадратов состоит в том, чтобы после выбора вида функциональной зависимости подобрать искомые коэффициенты a_j таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальных значений y_i от соответствующих вычисленных значений была бы минимальной.

$$F(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \tilde{f}(x_i; a_0, a_1, \ldots, a_m) \right]^2 = \min$$

где $F(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ - функция коэффициентов.

В точке минимума функции F ее производные обращаются в нуль. Тема самым получаем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_i $(i=0, 1, \ldots, m)$.

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial a_m} = 0.$$

Если эта система имеет единственное решение, то, соответственно, оно позволит однозначным образом определить приближающую функцию. данная система существенно упростится если эмпирическая функция будет линейной относительно параметров $a_0, a_1, \ldots, a_m$.

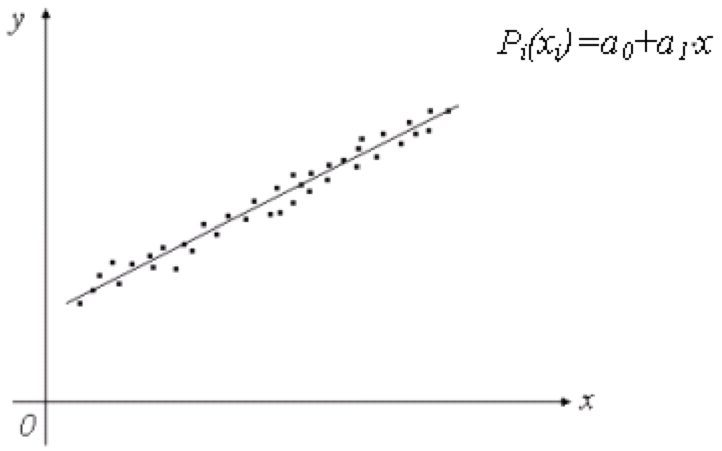
Тем самым нахождение конкретного вида эмпирической зависимости слагается из двух этапов:

- выяснение общего вида формулы;

-определение наилучших параметров эмпирической зависимости.

Как правило, используют достаточно узкий класс приближающих функций (линейная, квадратичная, степенная, показательная или логарифмическая функции). Выбор той или иной приближающей функции определяется либо априорными знаниями в отношении неизвестной функции, минимальным значением суммы квадратов отклонений экспериментальных значений y_i от соответствующих вычисленных значений для выбранной функции по сравнению с другими функциями, либо требованием получения наиболее вероятных теоретических значений при экстраполяции. Предпочтение также может отдаваться относительно простым формулам, обладающим достаточной точностью. Если отсутствуют сведения о промежуточных экспериментальных данных, то обычно считают, что приближающая функция будет аналитической и непрерывной. Удачный подбор приближающей функции часто зависит от опыта.

Рассмотрим вначале наиболее простой метод аппроксимации экспериментальных данных при помощи линейной функции (линейная аппроксимация).



Выведем формулы для расчета неизвестных коэффициентов a_0 и a_1 линейного аппроксимирующего полинома

$$F = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i)^2 \to \min$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_0} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i) \cdot 1 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_1} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i) \cdot x_i = 0. \end{cases}$$

.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i - a_0 \cdot n - a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i \cdot x_i) - a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i). \end{cases}$$

Получаем классическую систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Решая данную систему уравнений по методу Крамера, находим неизвестные коэффициенты a_0 и a_1.

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i) & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i)}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^2},$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i) - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^2}.$$

При этом определитель системы $D = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}$

не должен быть равен нулю. Если определитель D=0, то система или не имеет решений, или имеет бесконечное количество решений.

В качестве следующего шага рассмотрим параболическую аппроксимацию, т.е. с помощью многочлена 2-ой степени.

$P_2(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \rightarrow \min$

Такая аппроксимация называется нелинейной. Рассмотрим методику нахождения неизвестных коэффициентов a_i.

$$F = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2 \right)^2 \rightarrow \min$$

Приравняем к нулю частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2 \right) \cdot 1 = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2 \right) \cdot x_i = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial a_2} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2 \right) \cdot x_i^2 = 0.$$

Выполнив соответствующие преобразования, получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными a_0, a_1, a_2.

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i), \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 \cdot y_i \right) \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad S_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad S_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \quad S_4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^4$$

$$S_5 = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad S_6 = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i) \quad S_7 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 \cdot y_i \right).$$

С учетом принятых обозначений система будет примет следующий вид:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_2 = S_5, \\ a_0 \cdot S_1 + a_1 \cdot S_2 + a_2 \cdot S_3 = S_6, \\ a_0 \cdot S_2 + a_1 \cdot S_3 + a_2 \cdot S_4 = S_7. \end{cases}$$

Определим неизвестные коэффициенты a_0, a_1, a_2.

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} S_5 & S_1 & S_2 \\ S_6 & S_2 & S_3 \\ S_7 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}}, \quad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & S_5 & S_2 \\ S_1 & S_6 & S_3 \\ S_2 & S_7 & S_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}}, \quad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} n & S_1 & S_5 \\ S_1 & S_2 & S_6 \\ S_2 & S_3 & S_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}}$$

Необходимое условие: определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} n & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим теперь аппроксимацию в виде экспоненциальной функции

$$y = a \cdot e^{b \cdot x},$$

где a и b - неизвестные коэффициенты.

Прологарифмируем данное выражение

$$\ln(y) = \ln(a) + b \cdot x.$$

Введем обозначения: $Y=\ln(y)$; $A_0=\ln(a)$; $A_1=b$.

$$Y=A_0+A_1 \cdot x.$$

Последнее выражение представляет собой линейную функцию. Составим систему уравнений относительно A_0 и A_1.

$$F = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \left(A_0 + A_1 \cdot x_i\right)\right)^2 \to \min$$

Расчетные формулы аналогичны формулам для линейной аппроксимации После определения коэффициентов A_0 и A_1 вернемся к исходным величинам y, a и b.

В завершение рассмотрим аппроксимацию при помощи натурального логарифма

y=a ln(x) +b

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a\ln x_i - b)\ln x_i$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a\ln x_i - b)\ln x_i$$

Тем самым задача вновь сводится к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Порядок выполнения работы.

Необходимо провести аппроксимацию по методу наименьших квадратов для следующих узлов:

x	2	3	4	5	6	7	8
y	2	4	5	7	8	11	13

Используем вначале для аппроксимации функцию натурального логарифма y=a ln(x) +b.

Выполним вначале общие расчеты

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									сумма
2	x	2	3	4	5	6	7	8	35
3	y	2	4	5	7	8	11	13	50
4	xj^2	4	9	16	25	36	49	64	203
5	xj*yj	4	12	20	35	48	77	104	300
6	xj^3	8	27	64	125	216	343	512	1295
7	xj^4	16	81	256	625	1296	2401	4096	8771
8	xj^2*yj	8	36	80	175	288	539	832	1958
9	ln xi	0,693147	1,098612	1,38629436	1,60943791	1,791759	1,94591	2,079442	10,6046
10	lnxi^2	0,480453	1,206949	1,92181206	2,59029039	3,210402	3,786566	4,324077	17,5205
11	lnyi	0,693147	1,386294	1,60943791	1,94591015	2,079442	2,397895	2,564949	12,6771
12	lnxi*yi	1,386294	4,394449	6,93147181	11,2660654	14,33408	21,40501	27,03274	86,7501

Формульное выражение

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									сумма
2	x	2	3	4	5	6	7	8	=СУММ(B2:H2)
3	y	2	4	5	7	8	11	13	=СУММ(B3:H3)
4	xj^2	=B2*B2	=C2*C2	=D2*D2	=E2*E2	=F2*F2	=G2*G2	=H2*H2	=СУММ(B4:H4)
5	xj*yj	=B2*B3	=C2*C3	=D2*D3	=E2*E3	=F2*F3	=G2*G3	=H2*H3	=СУММ(B5:H5)
6	xj^3	=B2*B2*B2	=C2*C2*C2	=D2*D2*D2	=E2*E2*E2	=F2*F2*F2	=G2*G2*G2	=H2*H2*H2	=СУММ(B6:H6)
7	xj^4	=B2*B2*B2*B2	=C2*C2*C2*C2	=D2*D2*D2*D2	=E2*E2*E2*E2	=F2*F2*F2*F2	=G2*G2*G2*G2	=H2*H2*H2*H2	=СУММ(B7:H7)
8	xj^2*yj	=B2*B2*B3	=C2*C2*C3	=D2*D2*D3	=E2*E2*E3	=F2*F2*F3	=G2*G2*G3	=H2*H2*H3	=СУММ(B8:H8)
9	ln xi	=LN(B2)	=LN(C2)	=LN(D2)	=LN(E2)	=LN(F2)	=LN(G2)	=LN(H2)	=СУММ(B9:H9)
10	lnxi^2	=B9*B9	=C9*C9	=D9*D9	=E9*E9	=F9*F9	=G9*G9	=H9*H9	=СУММ(B10:H10)
11	lnyi	=LN(B3)	=LN(C3)	=LN(D3)	=LN(E3)	=LN(F3)	=LN(G3)	=LN(H3)	=СУММ(B11:H11)
12	lnxi*yi	=B9*B3	=C9*C3	=D9*D3	=E9*E3	=F9*F3	=G9*G3	=H9*H3	=СУММ(B12:H12)

Теперь можно перейти к расчету неизвестных коэффициентов для логарифмической аппроксимации

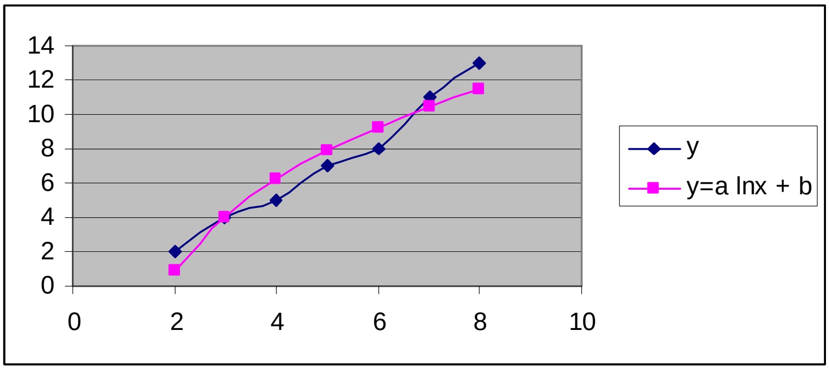
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
14	y=a	a	b	система уравнений	17,5205	10,6046	86,75011			
15		7,56124	-4,312		10,6046	7	50			
16										
17				опред	17,5205	10,6046	=	10,18625		
18					10,6046	7				
19				a=	86,7501	10,6046	=	77,02061	=	7,561236
20					50	7				
21				b=	17,5205	86,7501	=	-43,923	=	-4,31199
22					10,6046	50				
23										
24	x	2	3	4	5	6	7	8		
25	y	2	4	5	7	8	11	13		
26	y=a	0,92906	3,99488	6,17011	7,85735	9,23593	10,4015	11,41116	сумма	
27	R^2	1,14691	2,6E-05	1,36916	0,73505	1,52752	0,358203	2,524407	7,6612824	

Формульное выражение

	A	B	C	D	E
14	y=a lnx +	a	b	система уравнений	=I10
15		=J19	=J21		=I9
16					
17				опред	=E14
18					=E15
19				a=	=G14
20					=G15
21				b=	=E14

	F	G	H	I	J
14	=I9	=I12			
15	7	=I3			
16					
17	=F14	=	=МОПРЕД(E17:F18)		
18	=F15				
19	=F14	=	=МОПРЕД(E19:F20)	=	=H19/H17
20	=F15				
21	=G14	=	=МОПРЕД(E21:F22)	=	=H21/H17
22	=G15				
23					
24	=F2	=G2	=H2		
25	=F3	=G3	=H3		
26	=$B$15*LN(F24)+$C$15	=$B$15*LN(G24)+$C$15	=$B$15*LN(H24)+$C$15	сумма	
27	=(F25-F26)^2	=(G25-G26)^2	=(H25-H26)^2	=СУММ(B27:H27)	

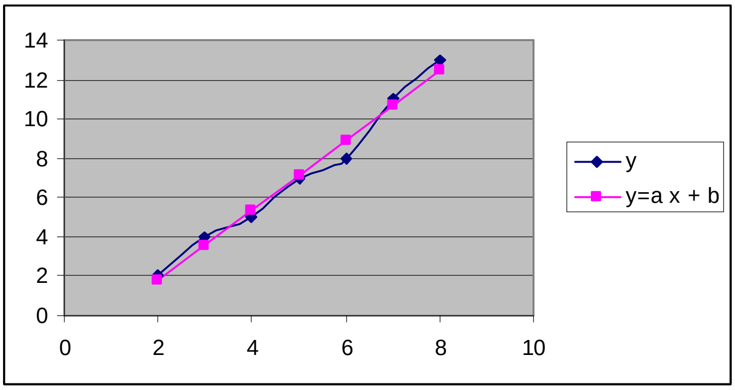
Результат логарифмической аппроксимации показан на следующем рисунке



Осуществим теперь линейную интерполяцию (формульное выражение не приводится, поскольку используются аналогичные формулы для решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными).

y=ax + b	a	b	система уравнений	203	35	300			
	1,785714286	-1,78571429		35	7	50			
			опред	203	35	=	196		
				35	7				
			a=	300	35	=	350	=	1,785714
				50	7				
			b=	203	300	=	-350	=	-1,78571
				35	50				
x	2	3	4	5	6	7	8		
y	2	4	5	7	8	11	13		
y=a x + b	1,785714286	3,57142857	5,35714286	7,142857143	8,92857143	10,7142857	12,5	сумма	

Результат линейной аппроксимации показан на следующем рисунке



Реализуем теперь аппроксимацию с помощью экспоненциальной функции:

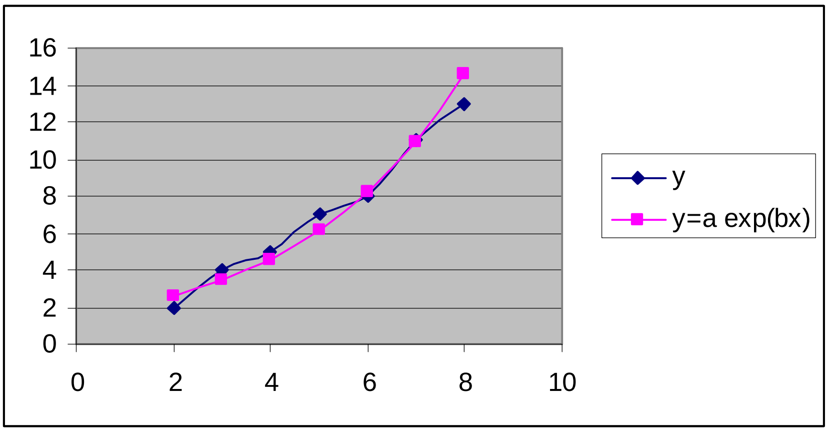
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
73										
74	y=a exp(bx)	a	b	система уравнений	7	35	12,67707578			
75		1,4376997	0,2895933		35	203	71,49399086			
76										
77				опред	7	35	=	196		
78					35	203				
79				a=	12,677076	35	=	71,1567023	=	0,4
80					71,493991	203				
81				b=	7	12,677076	=	56,7602839	=	0,3
82					35	71,493991				
83										
84	x	2	3	4	5	6	7	8		
85	y	2	4	5	7	8	11	13		
86	y=a exp(bx)	2,565699	3,4274764	4,5787111	6,1166271	8,1711047	10,91564843	14,5820407	сумма	
87	R^2	0,3200154	0,3277832	0,1774843	0,7803476	0,0292768	0,007115188	2,50285268	4,1449	

Формульное выражение:

y=a exp(b)	a	b	система уравнений	7
	=EXP(J79)	=J81		=F74
			опред	=E74
				=E75
			a=	=G74
				=G75
			b=	=E74
				=E75
x	=B53	=C53	=D53	=E53
y	=B54	=C54	=D54	=E54
y=a exp(b)	=$B$75*EXP($C$75*B84)	=$B$75*EXP($C$75*C84)	=$B$75*EXP($C$75*D84)	=$B$75*EXP($C$75*E84)
R^2	=(B85-B86)^2	=(C85-C86)^2	=(D85-D86)^2	=(E85-E86)^2

	F	G	H	I	J
73					
74	=I2	=I11			
75	=I4	=СУММПРОИЗВ(B11:H11;B2:H2)			
76					
77	=F74	=	=МОПРЕД(E77:F78)		
78	=F75				
79	=F74	=	=МОПРЕД(E79:F80)	=	=H79/H77
80	=F75				
81	=G74	=	=МОПРЕД(E81:F82)	=	=H81/H77
82	=G75				

Результат экспоненциальной аппроксимации показан на следующем рисунке



В завершение реализуем аппроксимацию с помощью полинома второй степени

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
104	y=a+bx+cx^2	a	b	c	система уравнений	7	35	203	50	
105		0,21	0,83	0,10		35	203	1295	300	
106						203	1295	8771	1958	
107										
108	дельта	7	35	203	a=	50,00	35,00	203,00	0,21	
109		35	203	1295		300,00	203,00	1295,00		
110		203	1295	8771		1958,00	1295,00	8771,00		
111	дельта	=	16464							
112										
113	b=	7	50	203	0,83	c=	7,00	35,00	50,00	0,10
114		35	300	1295			35,00	203,00	300,00	
115		203	1958	8771			203,00	1295,00	1958,00	
116										
117	x	2	3	4	5	6	7	8		
118	y	2	4	5	7	8	11	13		
119	y=a+bx+cx^2	2,26190476	3,57142857	5,07142857	6,76190476	8,64285714	10,71428571	12,97619048	сумма	
120	R^2	0,0685941	0,18367347	0,00510204	0,05668934	0,41326531	0,081632653	0,000566893	0,80952	

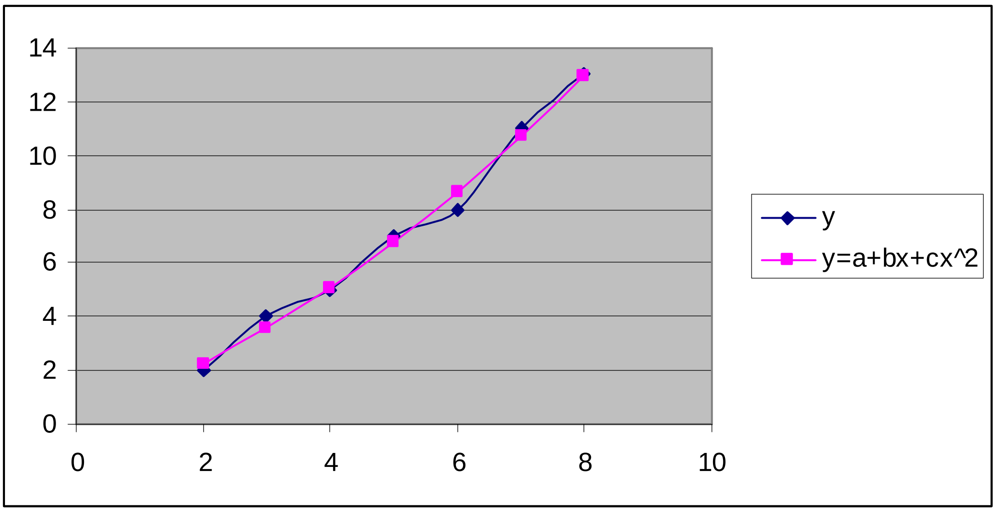
Формульная реализация

	A	B	C	D
104	y=a+bx+cx^2	a	b	c
105		=I108	=E113	=J113
106				
107				
108	дельта	=F104	=G104	=H104
109		=F105	=G105	=H105
110		=F106	=G106	=H106
111	дельта	=	=МОПРЕД(B108:D110)	
112				
113	b=	=F104	=I104	=H104
114		=F105	=I105	=H105
115		=F106	=I106	=H106
116				
117	x	=B84	=C84	=D84
118	y	=B85	=C85	=D85
119	y=a+bx+cx^2	=$B$105+$C$105*B117+$D$105*B117*E	=$B$105+$C$105*C117+$D$105*C117*C	=$B$105+$C$105*D117+$D$105*D117*D117
120	R^2	=(B118-B119)^2	=(C118-C119)^2	=(D118-D119)^2

	E	F	G
104	система уравнений	=7	=I2
105		=G104	=H104
106		=G105	=H105
107			
108	a=	=I104	=G104
109		=I105	=G105
110		=I106	=G106
111			
112			
113	=МОПРЕД(B113:D115)/$C$111	c=	=F104
114			=F105
115			=F106
116			
117	=E84	=F84	=G84
118	=E85	=F85	=G85
119	=$B$105+$C$105*E117+$D$105*E117*E117	=$B$105+$C$105*F117+$D$105*F117*F117	=$B$105+$C$105*G117+$D$105*G117*G117
120	=(E118-E119)^2	=(F118-F119)^2	=(G118-G119)^2

	H	I	J
104	=I4	=I3	
105	=I6	=I5	
106	=I7	=I8	
107			
108	=H104	=МОПРЕД(F108:H110)/$C$111	
109	=H105		
110	=H106		
111			
112			
113	=G104	=I104	=МОПРЕД(G113:I115)/$C$111
114	=G105	=I105	
115	=G106	=I106	
116			
117	=H84		
118	=H85		
119	=$B$105+$C$105*H117+$D$105*H117*H117	сумма	
120	=(H118-H119)^2	=СУММ(B120:H120)	

Результат аппроксимации полиномом второй степени показан на следующем рисунке



Проведенный анализ показывает, что сумма квадратов отклонений экспериментальных значений y_i от соответствующих значений, вычисленных на основе приближающей функции, будет минимальной для полинома второго порядка.

Задания для самостоятельной работы.

Осуществите аппроксимацию методом наименьших квадратов для следующих узлов, используя в качестве приближающей функции линейную функцию, полином второго порядка, экспоненциальную функцию и логарифмическую функцию. Проведите оценку суммы квадратов отклонений экспериментальных значений y_i от соответствующих значений, вычисленных на основе приближающей функции, и выберите приближающую функцию с минимальным значением суммы квадратов.

1	**X**	2	3	4	5	6	7
	Y	0	2	3	5	7	9

2	**X**	2	3	4	5	6	7
	Y	1	4	7	11	14	17

3	**X**	2	3	4	5	6	7
	Y	2	2,5	3	3,2	3,3	3,5

4	**X**	2	3	4	5	6	7
	Y	1	2	4	5	8	9

5	**X**	2	3	4	5	6	7
	Y	0	2	4	7	11	15

6	**X**	2	3	4	5	6	7
	Y	1	3	5	8	9	12

7	**X**	2	3	4	5	6	7

	Y	2	4	5	6	8	10

8	**X**	2	3	4	5	6	7
	Y	0	-2	-3	-5	-7	-9

9	**X**	2	3	4	5	6	7
	Y	1	3	4	5	6	6,5

10	**X**	2	3	4	5	6	7
	Y	-1	0	2	3	4	5

Практическое задание 16.

Аппроксимация с помощью встроенных инструментов табличного процессора Excel

Теоретические положения.

Задача аппроксимации функции по ее узлам встречается настолько часто в различных сферах человеческой деятельности, что создатели табличного процессора Excel встроили в него специальные инструменты, позволяющие решить эту задачу автоматически. При этом в качестве приближающих функций используются линейная, полиномиальная (вплоть до полинома 6-го порядка), экспоненциальная, логарифмическая и степенная функции. При использовании полинома реализуется интерполяция по Лагранжу, если число узлов приближаемой функции не превышает 7 (обратите внимание на то, что в случае выбора полинома 6-й степени для аппроксимации 4-х узлов все равно будет автоматически использован полином 3-й степени). Для всех прочих способов аппроксимации используется описанный в предыдущем практическом задании метод наименьших квадратов. В качестве дополнительных опций на диаграмму наряду в приближающей функцией может быть выведено ее аналитическое выражение и величина достоверности аппроксимации R^2 (принимает значения от 0 до 1 в случае полного совпадения в узлах значений приближающей функции с экспериментальными данными). Также возможно осуществить экстраполяцию функции кавалерийская влево (назад), так и вправо (вперед). Конечный выбор аппроксимирующей функции при использовании при аппроксимации нескольких функций может осуществляться на основании разных соображений, как, например,

1. достижение значения величины достоверности аппроксимации R^2=1 с целью наилучшей интерполяции в интервалах между узлами;

2. на основании заранее известных физических или прочих соображений (например, трудно представить себе закон природы, описываемый полиномом 6-й степени. Огромное число протекающих в природе и обществе процессов подчиняется линейным, квадратичным, логарифмическим или экспоненциальным законам).

3. на основании ожидаемых значений функции при экстраполяции вперед или назад.

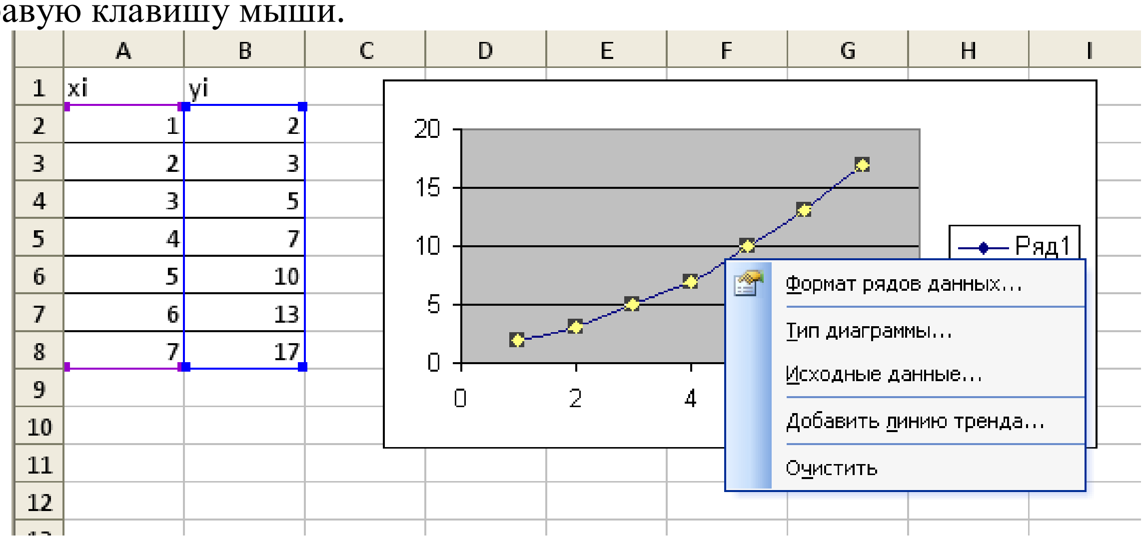
Тем самым выбор конечного результата в некоторых случаях является достаточно произвольным, напрямую зависящим от человека, принимающего решение.

Порядок выполнения работы.

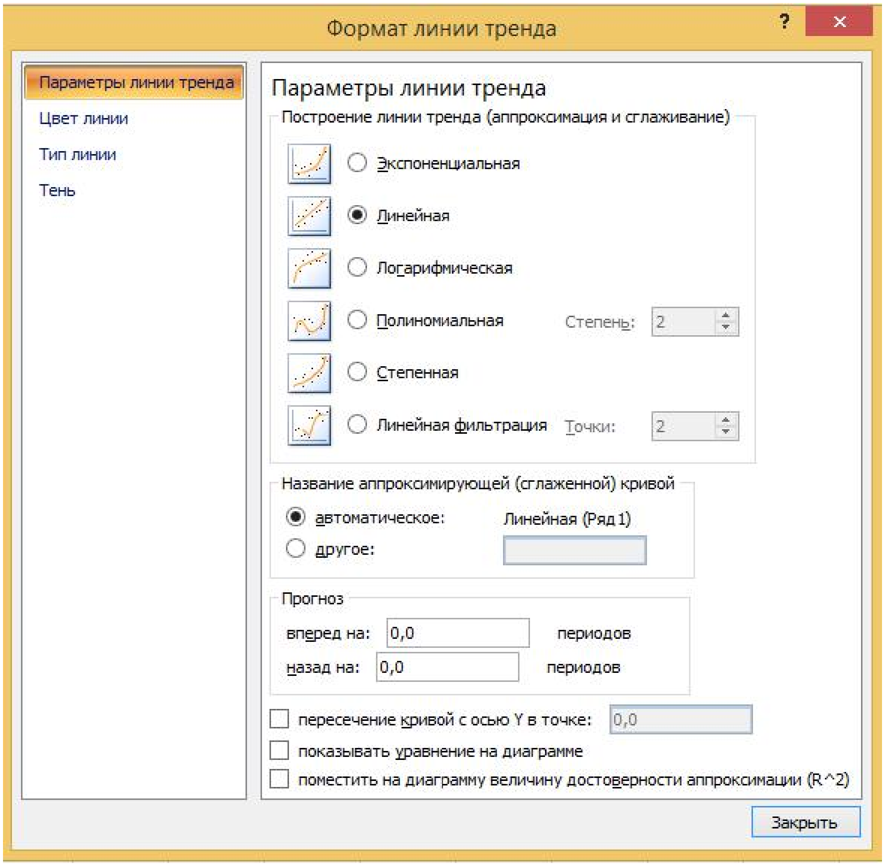
Необходимо с помощью линейной, полиномиальной (полином 2-го и 6-го порядка), экспоненциальной и логарифмической функции провести аппроксимацию для следующих узлов:

x_i	y_i
1	2
2	3
3	5
4	7
5	10
6	13
7	17

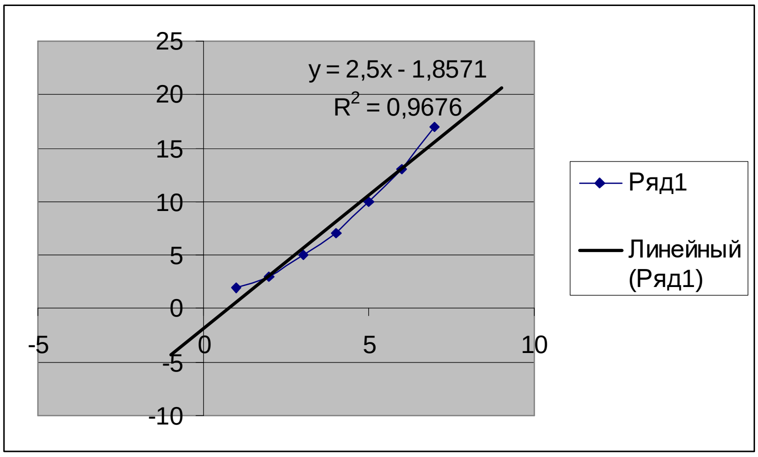
Внесем данные на лист табличного процессора Excel, построим график на основании экспериментальных данных, выделим график путем нажатия левой клавиши мыши и, не передвигая указатель мыши с графика функции, нажмем на правую клавишу мыши.



Для активации инструментов аппроксимации выберем в качестве опции "Добавить линию тренда". При этом будет открыто окно (данное окно имеет различный вид в различных версиях табличного процессора Excel), в котором будет предложено выбрать вид аппроксимурующей функции и дополнительные опции

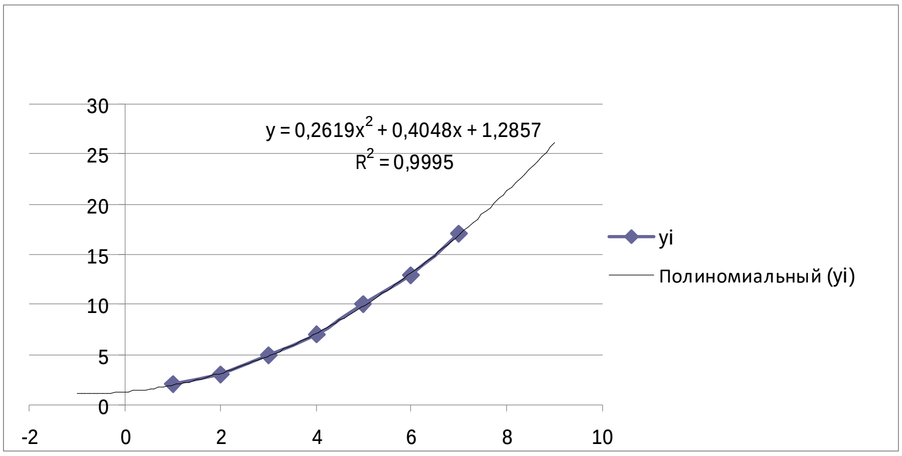


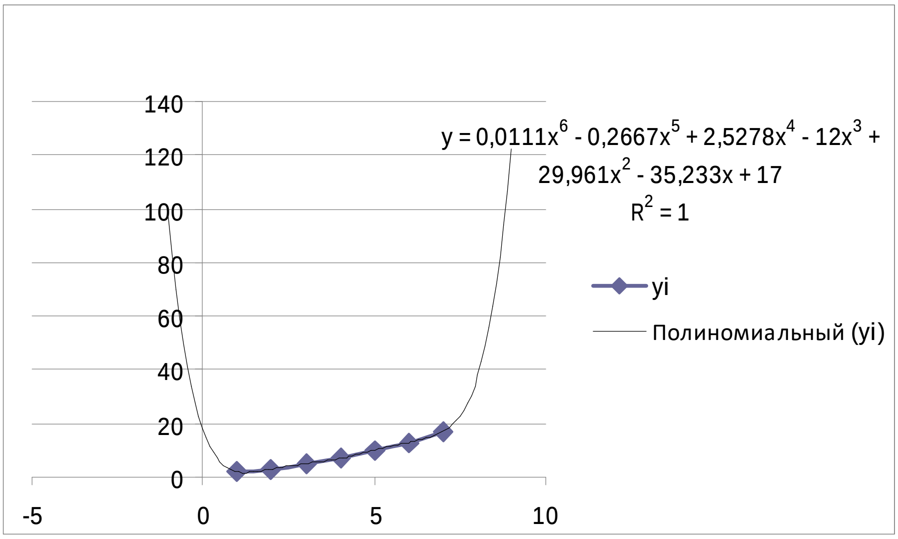
Выберем в качестве аппроксимирующей функции линейную функцию, поставим флажки на опциях "Показывать уравнение на диаграмме" и "Пометить на диаграмму величину достоверности аппроксимации", а также выберем прогноз вперед и назад на две единицы. В качестве результата линейной аппроксимации получим

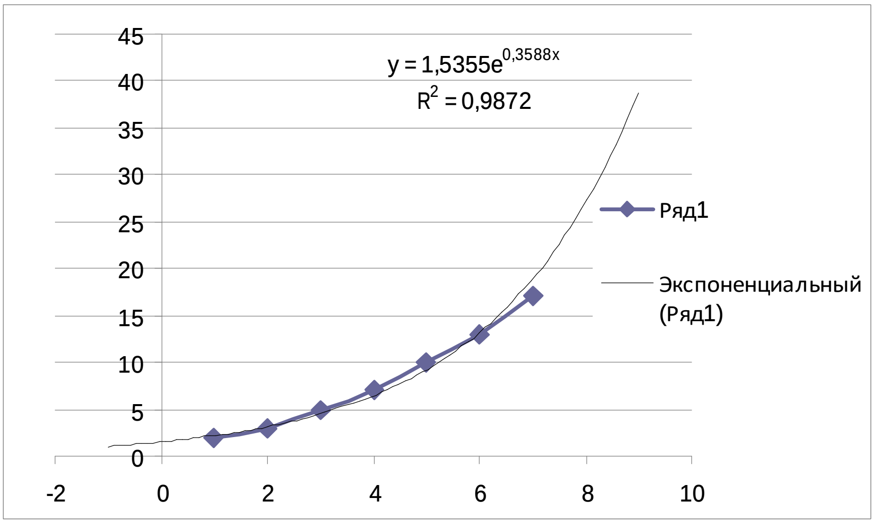


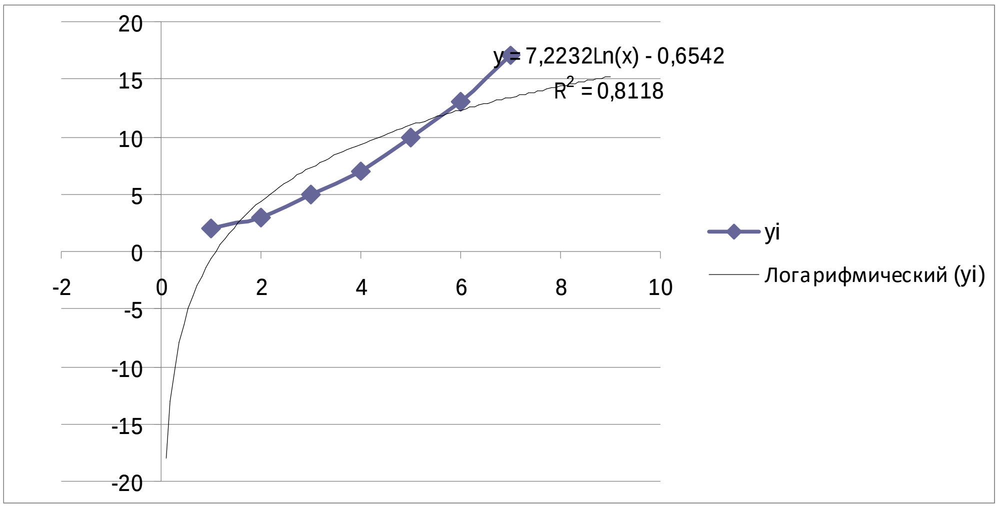
Как видно из рисунка, линейная аппроксимация, несмотря на высокое значение величины достоверности аппроксимации, дает относительно высокое расхождение для краевых узлов и явно нереальные значения при экстраполяции (если исходить из видимой динами процесса).

Применение полиномиальной (полином 2-го и 6-го порядка), экспоненциальной и логарифмической функцию с аналогичными опциями приводит к следующим результатам


y = 0,2619x2 + 0,4048x + 1,2857
R2 = 0,9995
yi
Полиномиальный (yi)
30
25
20
15
10
5
0
-2
0
2
4
6
8
10


y = 0,0111x6 - 0,2667x5 + 2,5278x4 - 12x3 + 29,961x2 - 35,233x + 17
R2 = 1
yi
Полиномиальный (yi)
140
120
100
80
60
40
20
0
-5
0
5
10


y = 1,5355e0,3588x
R2 = 0,9872
Ряд1
Экспоненциальный (Ряд1)
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
-2
0
2
4
6
8
10



Как и следовало ожидать, наибольшее значение величины достоверности аппроксимации будет достигнуто для полинома 6-го порядка. Однако результаты экстраполяции приводят к значениям, которые никак не вписываются в динамику изучаемого процесса. Аппроксимация при помощи логарифмической функции является в данном случае неудовлетворительной. Экспоненциальная функция дает хороший результат для узлов, однако результаты экстраполяции вправо кажутся сомнительными. Тем самым в случае одновременного использования критериев совпадения в узлах и ожидаемых значений функции при ее экстраполяции наиболее удачной кажется аппроксимация экспериментальной функции с помощью полинома второго порядка.

Задания для самостоятельной работы.

Осуществите аппроксимацию с помощью встроенных инструментов табличного процессора Excel для экспериментальных данных из задания 15. Используйте для аппроксимации полином второго и шестого порядка, линейную, экспоненциальную и логарифмическую функцию. Выведите на диаграмму аналитическое выражение для приближающей функции и величину достоверности аппроксимации. Сравните полученные результаты с результатами, полученными при выполнении предыдущего задания. Реализуйте экстраполяцию приближающей функции вперед и назад на две единицы. Подумайте, для чего это необходимо.

Практическое задание 17.

Численное дифференцирование.

Теоретические положения.

Задача численного дифференцирования функции, заданной таблично, также довольно широко распространена на практике. В качестве основного подхода для решения этой задачи используется дифференцирование полученной на основе узлов приближающей функции, выраженной аналитически. В некоторых случаях для нахождения производной используется приближение функции с помощью интерполяционного полинома Ньютона 1-го или второго порядка

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{f(x_0)-f(x_1)}{(x_0-x_1)}$$

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{f(x_0)-f(x_1)}{(x_0-x_1)}+(x-x_0)(x-x_1)\frac{\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{(x_0-x_1)}-\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{(x_1-x_2)}}{(x_0-x_2)}$$

Дифференцирование данных выражений приводит к следующему результату:

$$f'(x)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{(x_0-x_1)}$$

$$f'(x)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{(x_0-x_1)}+(2x-x_0-x_1)\frac{\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{(x_0-x_1)}-\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{(x_1-x_2)}}{(x_0-x_2)}$$

$$f''(x)=2x\frac{\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{(x_0-x_1)}-\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{(x_1-x_2)}}{(x_0-x_2)}$$

Таким образом, при использовании в качестве приближающей функции интерполяционных полиномов Ньютона становится возможным осуществить расчет производной, не находя в явном виде саму приближающую функцию. К недостатка данного метода можно отнести то, что включение узел в расчеты в качестве правого, промежуточного (для полинома 2-го порядка), а затем еще и в качестве левого узла приведет к тому, что значения рассчитанных производных в узле будут различными (например, при использовании полинома 1-й степени значения производной в двух узлах будут одинаковыми). Тем самым возникает проблема расчета производной в узле. решение которой не является столь очевидной.

Порядок выполнения работы.

Поскольку расчет производной в табличном процессоре Excel на основании полученного путем дифференцирования приближающей функции аналитического выражение повторяет по своей сути содержимое практического занятия №4, исследует в рамках данного практического занятия точность численного дифференцирования на основании интерполяционных полиномов Ньютона. Возьмем для этого какую-либо аналитическую функцию, для которой мы можем получить аналитическое выражение ее производной, например, y=ln(x), y'=1/x. Посчитаем на основании данных формул значения функции и ее производной в узлах, а затем произведем расчет производной по выше приведенным формулам на основании интерполяционных полиномов Ньютона первой степени. Результаты данных расчетов приведены ниже

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				1-я степень			ошибка		
2	x	y=ln(x)	y'=1/x	производная слева	производная справа	среднее	производная слева	производная справа	среднее
3	2	0,69315	0,5	0,40546511					
4	3	1,09861	0,33333	0,40546511	0,28768207	0,34657359	21,64%	13,70%	3,97%
5	4	1,38629	0,25	0,22314355	0,28768207	0,25541281	10,74%	15,07%	2,17%
6	5	1,60944	0,2	0,22314355	0,18232156	0,20273255	11,57%	8,84%	1,37%
7	6	1,79176	0,16667	0,15415068	0,18232156	0,16823612	7,51%	9,39%	0,94%
8	7	1,94591	0,14286	0,15415068	0,13353139	0,14384104	7,91%	6,53%	0,69%
9	8	2,07944	0,125	0,11778304	0,13353139	0,12565721	5,77%	6,83%	0,53%
10	9	2,19722	0,11111	0,11778304	0,10536052	0,11157178	6,00%	5,18%	0,41%
11	10	2,30259	0,1	0,09531018	0,10536052	0,10033535	4,69%	5,36%	0,34%
12	11	2,3979	0,09091	0,09531018	0,08701138	0,09116078	4,84%	4,29%	0,28%
13	12	2,48491	0,08333	0,08004271	0,08701138	0,08352704	3,95%	4,41%	0,23%
14	13	2,56495	0,07692	0,08004271	0,07410797	0,07707534	4,06%	3,66%	0,20%
15	14	2,63906	0,07143	0,06899287	0,07410797	0,07155042	3,41%	3,75%	0,17%
16	15	2,70805	0,06667	0,06899287	0,06453852	0,0667657	3,49%	3,19%	0,15%
17	16	2,77259	0,0625	0,06062462	0,06453852	0,06258157	3,00%	3,26%	0,13%
18	17	2,83321	0,05882	0,06062462	0,05715841	0,05889152	3,06%	2,83%	0,12%
19	18	2,89037	0,05556	0,05406722	0,05715841	0,05561282	2,68%	2,89%	0,10%
20	19	2,94444	0,05263	0,05406722	0,05129329	0,05268026	2,73%	2,54%	0,09%
21	20	2,99573	0,05		0,05129329				

Формульное выражение

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				1-я степень			ошибка		
2	x	y=ln(x)	y'=1/x	производная слева	производная справа	среднее	производная слева	производная справа	среднее
3	2	0,69315	0,5	0,40546511					
4	3	1,09861	0,33333	0,40546511	0,28768207	0,34657359	21,64%	13,70%	3,97%
5	4	1,38629	0,25	0,22314355	0,28768207	0,25541281	10,74%	15,07%	2,17%
6	5	1,60944	0,2	0,22314355	0,18232156	0,20273255	11,57%	8,84%	1,37%
7	6	1,79176	0,16667	0,15415068	0,18232156	0,16823612	7,51%	9,39%	0,94%
8	7	1,94591	0,14286	0,15415068	0,13353139	0,14384104	7,91%	6,53%	0,69%
9	8	2,07944	0,125	0,11778304	0,13353139	0,12565721	5,77%	6,83%	0,53%
10	9	2,19722	0,11111	0,11778304	0,10536052	0,11157178	6,00%	5,18%	0,41%
11	10	2,30259	0,1	0,09531018	0,10536052	0,10033535	4,69%	5,36%	0,34%
12	11	2,3979	0,09091	0,09531018	0,08701138	0,09116078	4,84%	4,29%	0,28%
13	12	2,48491	0,08333	0,08004271	0,08701138	0,08352704	3,95%	4,41%	0,23%
14	13	2,56495	0,07692	0,08004271	0,07410797	0,07707534	4,06%	3,66%	0,20%
15	14	2,63906	0,07143	0,06899287	0,07410797	0,07155042	3,41%	3,75%	0,17%
16	15	2,70805	0,06667	0,06899287	0,06453852	0,0667657	3,49%	3,19%	0,15%
17	16	2,77259	0,0625	0,06062462	0,06453852	0,06258157	3,00%	3,26%	0,13%
18	17	2,83321	0,05882	0,06062462	0,05715841	0,05889152	3,06%	2,83%	0,12%
19	18	2,89037	0,05556	0,05406722	0,05715841	0,05561282	2,68%	2,89%	0,10%
20	19	2,94444	0,05263	0,05406722	0,05129329	0,05268026	2,73%	2,54%	0,09%
21	20	2,99573	0,05		0,05129329				

Для расчета относительной ошибки численного дифференцирования использовалось следующее выражение

$$\frac{\left|y'_{теор} - y'_{расч}\right|}{y'_{теор}}$$

Результаты расчетов показывают, что при использовании правых и левых значений производной в области сильного отклонения функции от линейной зависимости ошибка в расчет левой и правой производной довольно высока.

Однако использование усредненного значения, как это и можно было ожидать, позволяет резко уменьшить значение ошибки данного метода.

Из расчетов видно, что в области быстрого изменения значений производной ошибка усреднения достигает несколько процентов, в то время как в на интервале с относительно медленным ростом производной ошибку можно считать несущественной.

Аналогичные расчеты для полинома Ньютона второго порядка дают:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
80	x	y=ln(x)	y'=1/x	=(F(x0)-F(x1))/(x0-x1)	=(F(x1)-F(x2))/(x1-x2)	a	b	левая	средняя	правая
81	2	0,693147181	0,5	0,405465	0,287682	-0,0588915	0,69992	0,4643566		
82	3	1,098612289	0,333333333	0,287682	0,223144	-0,0322693	0,51357	0,3199513	0,34657359	
83	4	1,386294361	0,25	0,223144	0,182322	-0,020411	0,40684	0,2435545	0,255412812	0,22879
84	5	1,609437912	0,2	0,182322	0,154151	-0,0140854	0,33726	0,196407	0,202732554	0,19087
85	6	1,791759469	0,166666667	0,154151	0,133531	-0,0103096	0,28818	0,1644603	0,168236118	0,16191
86	7	1,945910149	0,142857143	0,133531	0,117783	-0,0078742	0,25164	0,1414056	0,143841036	0,14007
87	8	2,079441542	0,125	0,117783	0,105361	-0,0062113	0,22337	0,1239943	0,125657214	0,12322
88	9	2,197224577	0,111111111	0,105361	0,09531	-0,0050252	0,20084	0,1103857	0,111571776	0,10991
89	10	2,302585093	0,1	0,09531	0,087011	-0,0041494	0,18245	0,0994596	0,100335348	0,09915
90	11	2,397895273	0,090909091	0,087011	0,080043	-0,0034843	0,16715	0,0904957	0,091160778	0,09029
91	12	2,48490665	0,083333333	0,080043	0,074108	-0,0029674	0,15423	0,0830101	0,083527042	0,08286
92	13	2,564949357	0,076923077	0,074108	0,068993	-0,0025576	0,14316	0,0766655	0,07707534	0,07656
93	14	2,63905733	0,071428571	0,068993	0,064539	-0,0022272	0,13358	0,07122	0,071550422	0,07114
94	15	2,708050201	0,066666667	0,064539	0,060625	-0,0019569	0,1252	0,0664955	0,066765696	0,06644
95	16	2,772588722	0,0625	0,060625	0,057158	-0,0017331	0,11782	0,0623577	0,062581571	0,06231
96	17	2,833213344	0,058823529	0,057158	0,054067	-0,0015456	0,11125	0,058704	0,058891518	0,05867
97	18	2,890371758	0,055555556	0,054067	0,051293	-0,001387	0,10538		0,055612818	0,05543
98	19	2,944438979	0,052631579	0,051293		0,00269965	-0,054			0,05252
99	20	2,995732274	0,05			0	0			

	H	I	J	K	L	M	N	O
80	левая	средняя	правая	среднее	производная слева	производная посередине	производная справа	среднее
81	0,4643566				7,13%			
82	0,3199513	0,34657359			4,01%	3,97%		
83	0,2435545	0,255412812	0,22879	0,24259	2,58%	2,17%	8,48%	2,97%
84	0,196407	0,202732554	0,19087	0,19667	1,80%	1,37%	4,56%	1,66%
85	0,1644603	0,168236118	0,16191	0,16487	1,32%	0,94%	2,85%	1,08%
86	0,1414056	0,143841036	0,14007	0,14177	1,02%	0,69%	1,95%	0,76%
87	0,1239943	0,125657214	0,12322	0,12429	0,80%	0,53%	1,42%	0,57%
88	0,1103857	0,111571776	0,10991	0,11062	0,65%	0,41%	1,08%	0,44%
89	0,0994596	0,100335348	0,09915	0,09965	0,54%	0,34%	0,85%	0,35%
90	0,0904957	0,091160778	0,09029	0,09065	0,45%	0,28%	0,69%	0,29%
91	0,0830101	0,083527042	0,08286	0,08313	0,39%	0,23%	0,57%	0,24%
92	0,0766655	0,07707534	0,07656	0,07677	0,33%	0,20%	0,47%	0,20%
93	0,07122	0,071550422	0,07114	0,0713	0,29%	0,17%	0,40%	0,17%
94	0,0664955	0,066765696	0,06644	0,06657	0,26%	0,15%	0,35%	0,15%
95	0,0623577	0,062581571	0,06231	0,06242	0,23%	0,13%	0,30%	0,13%
96	0,058704	0,058891518	0,05867	0,05875	0,20%	0,12%	0,26%	0,12%
97		0,055612818	0,05543			0,10%	0,23%	
98			0,05252				0,21%	

Формульное выражение

	A	B	C	D	E	F
80	x	y=ln(x)	y'=1/x	=(F(x0)-F(x1))/(x0-x1)	=(F(x1)-F(x2))/(x1-x2)	a
81	2	=LN(A81)	=1/A81	=(B82-B81)/(A82-A81)	=(B82-B83)/(A82-A83)	=(D81-E81)/(A81-A83)
82	3	=LN(A82)	=1/A82	=(B83-B82)/(A83-A82)	=(B83-B84)/(A83-A84)	=(D82-E82)/(A82-A84)
83	4	=LN(A83)	=1/A83	=(B84-B83)/(A84-A83)	=(B84-B85)/(A84-A85)	=(D83-E83)/(A83-A85)
84	5	=LN(A84)	=1/A84	=(B85-B84)/(A85-A84)	=(B85-B86)/(A85-A86)	=(D84-E84)/(A84-A86)
85	6	=LN(A85)	=1/A85	=(B86-B85)/(A86-A85)	=(B86-B87)/(A86-A87)	=(D85-E85)/(A85-A87)
86	7	=LN(A86)	=1/A86	=(B87-B86)/(A87-A86)	=(B87-B88)/(A87-A88)	=(D86-E86)/(A86-A88)
87	8	=LN(A87)	=1/A87	=(B88-B87)/(A88-A87)	=(B88-B89)/(A88-A89)	=(D87-E87)/(A87-A89)
88	9	=LN(A88)	=1/A88	=(B89-B88)/(A89-A88)	=(B89-B90)/(A89-A90)	=(D88-E88)/(A88-A90)
89	10	=LN(A89)	=1/A89	=(B90-B89)/(A90-A89)	=(B90-B91)/(A90-A91)	=(D89-E89)/(A89-A91)
90	11	=LN(A90)	=1/A90	=(B91-B90)/(A91-A90)	=(B91-B92)/(A91-A92)	=(D90-E90)/(A90-A92)
91	12	=LN(A91)	=1/A91	=(B92-B91)/(A92-A91)	=(B92-B93)/(A92-A93)	=(D91-E91)/(A91-A93)
92	13	=LN(A92)	=1/A92	=(B93-B92)/(A93-A92)	=(B93-B94)/(A93-A94)	=(D92-E92)/(A92-A94)
93	14	=LN(A93)	=1/A93	=(B94-B93)/(A94-A93)	=(B94-B95)/(A94-A95)	=(D93-E93)/(A93-A95)
94	15	=LN(A94)	=1/A94	=(B95-B94)/(A95-A94)	=(B95-B96)/(A95-A96)	=(D94-E94)/(A94-A96)
95	16	=LN(A95)	=1/A95	=(B96-B95)/(A96-A95)	=(B96-B97)/(A96-A97)	=(D95-E95)/(A95-A97)
96	17	=LN(A96)	=1/A96	=(B97-B96)/(A97-A96)	=(B97-B98)/(A97-A98)	=(D96-E96)/(A96-A98)
97	18	=LN(A97)	=1/A97	=(B98-B97)/(A98-A97)	=(B98-B99)/(A98-A99)	=(D97-E97)/(A97-A99)
98	19	=LN(A98)	=1/A98	=(B99-B98)/(A99-A98)		=(D98-E98)/(A98-A100)
99	20	=LN(A99)	=1/A99			=(D99-E99)/(A99-A101)
100						

	F	G	H	I	J
80	a	b	левая	средняя	правая
81	=(D81-E81)/(A81-A83)	=D81-A81*F81-A82*F81	=2*A81*F81+G81		
82	=(D82-E82)/(A82-A84)	=D82-A82*F82-A83*F82	=2*A82*F82+G82	=2*A82*F81+G81	
83	=(D83-E83)/(A83-A85)	=D83-A83*F83-A84*F83	=2*A83*F83+G83	=2*A83*F82+G82	=2*A83*F81+G81
84	=(D84-E84)/(A84-A86)	=D84-A84*F84-A85*F84	=2*A84*F84+G84	=2*A84*F83+G83	=2*A84*F82+G82
85	=(D85-E85)/(A85-A87)	=D85-A85*F85-A86*F85	=2*A85*F85+G85	=2*A85*F84+G84	=2*A85*F83+G83
86	=(D86-E86)/(A86-A88)	=D86-A86*F86-A87*F86	=2*A86*F86+G86	=2*A86*F85+G85	=2*A86*F84+G84
87	=(D87-E87)/(A87-A89)	=D87-A87*F87-A88*F87	=2*A87*F87+G87	=2*A87*F86+G86	=2*A87*F85+G85
88	=(D88-E88)/(A88-A90)	=D88-A88*F88-A89*F88	=2*A88*F88+G88	=2*A88*F87+G87	=2*A88*F86+G86
89	=(D89-E89)/(A89-A91)	=D89-A89*F89-A90*F89	=2*A89*F89+G89	=2*A89*F88+G88	=2*A89*F87+G87
90	=(D90-E90)/(A90-A92)	=D90-A90*F90-A91*F90	=2*A90*F90+G90	=2*A90*F89+G89	=2*A90*F88+G88
91	=(D91-E91)/(A91-A93)	=D91-A91*F91-A92*F91	=2*A91*F91+G91	=2*A91*F90+G90	=2*A91*F89+G89
92	=(D92-E92)/(A92-A94)	=D92-A92*F92-A93*F92	=2*A92*F92+G92	=2*A92*F91+G91	=2*A92*F90+G90
93	=(D93-E93)/(A93-A95)	=D93-A93*F93-A94*F93	=2*A93*F93+G93	=2*A93*F92+G92	=2*A93*F91+G91
94	=(D94-E94)/(A94-A96)	=D94-A94*F94-A95*F94	=2*A94*F94+G94	=2*A94*F93+G93	=2*A94*F92+G92
95	=(D95-E95)/(A95-A97)	=D95-A95*F95-A96*F95	=2*A95*F95+G95	=2*A95*F94+G94	=2*A95*F93+G93
96	=(D96-E96)/(A96-A98)	=D96-A96*F96-A97*F96	=2*A96*F96+G96	=2*A96*F95+G95	=2*A96*F94+G94
97	=(D97-E97)/(A97-A99)	=D97-A97*F97-A98*F97		=2*A97*F96+G96	=2*A97*F95+G95
98	=(D98-E98)/(A98-A100)	=D98-A98*F98-A99*F98			=2*A98*F96+G96
99	=(D99-E99)/(A99-A101)	=D99-A99*F99-A100*F99			

	K	L	M	N	O
80	среднее	производная слева	производная посередине	производная справа	среднее
81		=ABS(H81-C81)/C81			
82		=ABS(H82-C82)/C82	=ABS(I82-C82)/C82		
83	=(H83+I83+J83)/3	=ABS(H83-C83)/C83	=ABS(I83-C83)/C83	=ABS(J83-C83)/C83	=ABS(K83-C83)/C83
84	=(H84+I84+J84)/3	=ABS(H84-C84)/C84	=ABS(I84-C84)/C84	=ABS(J84-C84)/C84	=ABS(K84-C84)/C84
85	=(H85+I85+J85)/3	=ABS(H85-C85)/C85	=ABS(I85-C85)/C85	=ABS(J85-C85)/C85	=ABS(K85-C85)/C85
86	=(H86+I86+J86)/3	=ABS(H86-C86)/C86	=ABS(I86-C86)/C86	=ABS(J86-C86)/C86	=ABS(K86-C86)/C86
87	=(H87+I87+J87)/3	=ABS(H87-C87)/C87	=ABS(I87-C87)/C87	=ABS(J87-C87)/C87	=ABS(K87-C87)/C87
88	=(H88+I88+J88)/3	=ABS(H88-C88)/C88	=ABS(I88-C88)/C88	=ABS(J88-C88)/C88	=ABS(K88-C88)/C88
89	=(H89+I89+J89)/3	=ABS(H89-C89)/C89	=ABS(I89-C89)/C89	=ABS(J89-C89)/C89	=ABS(K89-C89)/C89
90	=(H90+I90+J90)/3	=ABS(H90-C90)/C90	=ABS(I90-C90)/C90	=ABS(J90-C90)/C90	=ABS(K90-C90)/C90
91	=(H91+I91+J91)/3	=ABS(H91-C91)/C91	=ABS(I91-C91)/C91	=ABS(J91-C91)/C91	=ABS(K91-C91)/C91
92	=(H92+I92+J92)/3	=ABS(H92-C92)/C92	=ABS(I92-C92)/C92	=ABS(J92-C92)/C92	=ABS(K92-C92)/C92
93	=(H93+I93+J93)/3	=ABS(H93-C93)/C93	=ABS(I93-C93)/C93	=ABS(J93-C93)/C93	=ABS(K93-C93)/C93
94	=(H94+I94+J94)/3	=ABS(H94-C94)/C94	=ABS(I94-C94)/C94	=ABS(J94-C94)/C94	=ABS(K94-C94)/C94
95	=(H95+I95+J95)/3	=ABS(H95-C95)/C95	=ABS(I95-C95)/C95	=ABS(J95-C95)/C95	=ABS(K95-C95)/C95
96	=(H96+I96+J96)/3	=ABS(H96-C96)/C96	=ABS(I96-C96)/C96	=ABS(J96-C96)/C96	=ABS(K96-C96)/C96
97			=ABS(I97-C97)/C97	=ABS(J97-C97)/C97	
98				=ABS(J98-C98)/C98	

Результаты проведенных расчетов показывают, что использование полинома второго порядка вместо полинома первого порядка при расчете для отдельных узла справа, слева или посередине приводит к довольно заметному повышению точности определения значения производной в узле, однако отличие усредненных результатов по точности определения производной в узле можно считать скорее несущественными.

Из расчетов вновь видно, что в области быстрого изменения значений производной ошибка усреднения достигает несколько процентов, в то время как на интервале с относительно медленным ростом производной ошибку можно считать несущественной.

Задания для самостоятельной работы

Осуществите численное дифференцирование на основе интерполяционного полинома Ньютона первой и второй степени для табличных данных из задания 15. Оцените точность использованного метода дифференцирования.

Практическое задание 18.

Численное интегрирование.

Теоретические положения.

Как хорошо известно, при задании функции аналитическим методом задача дифференцирования всегда может быть решена с использованием таблицы производных элементарных функций. Напротив, получение аналитического, выраженного через элементарные функции выражения для первообразной от функции, заданной аналитически, не всегда возможно (так называемые не берущиеся интегралы). Кроме того, если функция задана таблично, то получение аналитического выражения для первообразной потребовало бы вначале решения задачи аппроксимации функции для n узлов. Представленные ниже приближенные методы численного интегрирования позволяют получить необходимый результат, не прибегая в явном виде аналитического выражения для первообразной.

Итак, рассмотрим несколько подходов к решению задачи вычисления определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

при условии, что a и b конечны, а $F(x)$ является ограниченной непрерывной функцией на всем интервале интегрирования [a,b] и ее производные на данном интервале также конечны и непрерывны. Предположим далее, что нельзя воспользоваться для вычисления этого интеграла формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

поскольку первообразную функция либо нельзя выразить в элементарных функциях, либо функция $f(x)$задана в виде таблицы. Задача численного интегрирования состоит в нахождении приближенного значения интеграла по заданным (таблица экспериментальных данных) или вычисленным значениям функции $f(x)$ в определенных точках.

Общий подход к решению задачиодинаков для всех методов численного интегрирования. Определенный интеграл I представляет собой площадь криволинейной трапеции, т.е. площадь, ограниченную кривой $f(x)$, осью x и прямыми x=a и x=b. Определенный интеграл, согласно его определению, вычисляется путем разбиения интервала $[a,b]$ на некоторое число меньших интервалов и нахождения для них площади правильной геометрической фигуры, которой будет заменена соответствующая криволинейная трапеция. В данном случае искомый интеграл будет представлять собой суммы площадей этих правильных геометрических фигур. В зависимости от способа замены на меньшем интервале криволинейной трапеции на правильную геометрическую фигуру существуют различные методы численного интегрирования (методы прямоугольников, трапеций, парабол и др.). рассмотрим наиболее часто используемые методы.

Метод прямоугольников

Данный метод является простейшим методом численного интегрирования. Он использует замену определенного интеграла интегральной суммой площадей прямоугольников, построенных на интервалах разбиения:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i, \;\; \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

.

Для простоты разобъём интервал $[a,b]$ на n равных частей. Обозначим $\Delta x_i = h$ шаг разбиения. Теперь остается лишь осуществить правильный выбор точек ξ_i. В качестве точек ξ_i можно выбрать левую границу элементарных отрезков ($\xi_i = x_i$-1), правую границу ($\xi_i = x_i$) или их середину:

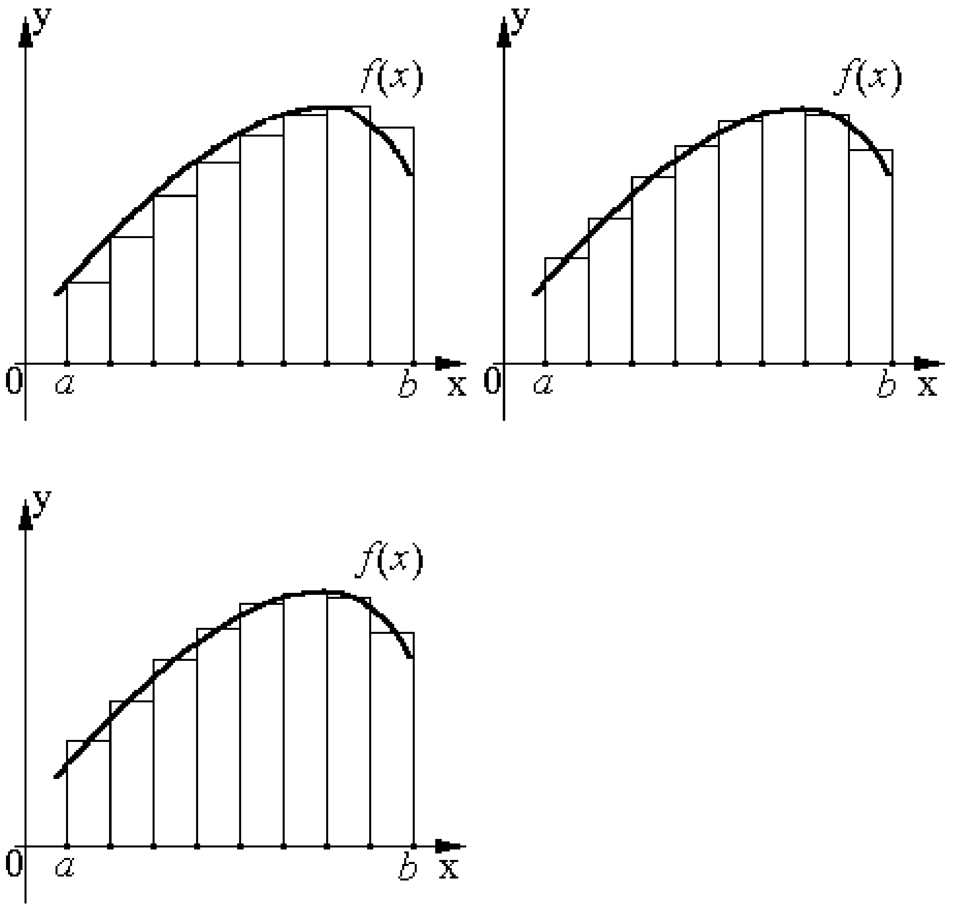
Соответствующие расчетные формулы примут вид:

$$\int_a^b f(x)dx = h_1 \cdot f(x_0) + h_2 \cdot f(x_1) + \ldots + h_n \cdot f(x_{n-1})$$

$$\int_a^b f(x)dx = h_1 \cdot f(x_1) + h_2 \cdot f(x_2) + \ldots + h_n \cdot f(x_n)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)$$

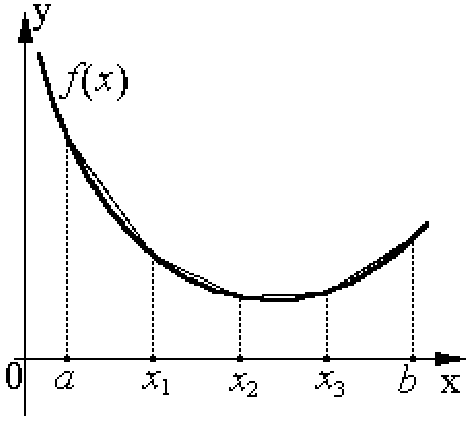
Геометрическая интерпретация формул представлена на рисунке:



Хотя последняя формула кажется более точной, поскольку она компенсирует недостаток площади с одной стороны с избытком площади с другой, можно ожидать, что при достаточно мелком разбиении интервала [a,b] все три формулы согласно определению определенного интеграла должны позволять осуществить численное интегрирование с нужной точностью (согласно определению определенного интеграла выбор точки ξ_i внутри элементарного интервала в предел не должен влиять на получаемый результат). Можно показать, что ошибка данного метода пропорциональна квадрату шага разбиения, умноженному на значение второй производной. Тем самым, уменьшая шаг разбиения, с помощью данного метода можно добиться любой точности численного интегрирования. Кроме того, данный метод даст точный, не зависящий от шага разбиения результат в случае численного интегрирования для линейной функции.

Метод трапеций

Метод трапеций использует линейную Ньютоновскую интерполяцию функции между двумя соседними узлами, что означает, что график функции $y=f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющей соседние узлы (см. практическое задание №14). В этом случае площадь всей криволинейной трапеции представляет собой сумму площадей элементарных прямоугольных трапеций (см. рисунок)



Как известно, площадь трапеции определяется как произведение полусуммы длин ее оснований на высоту

$$S_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \cdot h_i$$

Складывая суммы всех полученных после разбиения трапеций получим формулу трапеций для численного интегрирования:

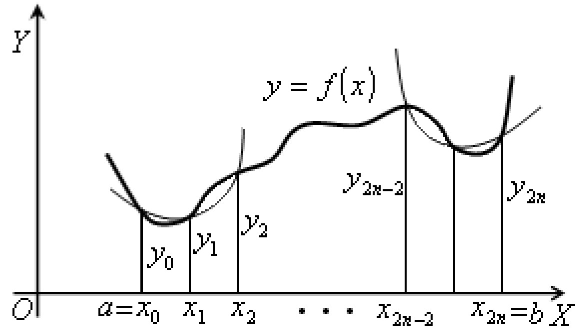
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} s_i = \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i)$$

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

Можно показать, что ошибка данного метода такая же, как и в случае ипользования метода прямоугольников.

Метод парабол (формула Симпсона)

Этот метод более точный по сравнению с методами прямоугольников и трапеций. В основе метода парабол лежит квадратичная интерполяция подынтегральной функции на отрезке по трем равноотстоящим узлам (два краевых узла и один узел посередине, см. рисунок).



Разобьем интервал интегрирования [a, b] на n равных отрезков с шагом h. Применим обозначения: $x_0=a$, $x_1=x_0+h$, … , $x_n=x_0+nh=b$. Значения функции в точках обозначим $y_0=f(a)$; $y_1=f(x_1)$; $y_2=f(x_2)$; … ; $y_n=f(b)$. Определим координаты середин элементарных отрезков и рассчитаем для них значение функции

$f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)$ (если функция задана таблично, то значение функции в середине интервала может быть определено как полусумма значений функции на концах

$$f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)=\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}.$$

На каждом элементарном отрезке подынтегральную функцию $f(x)$ заменим на интерполяционный многочлен второй степени

$$f(x)\approx P_i(x)=a_ix^2+b_ix+c_i,$$

который будем строить таким образом, чтобы он проходил через узлы по краям и в середине интервала (см. рисунок)

Если выбрать в качестве $P_i(x)$ интерполяционный многочлен Лагранжа или Ньютона второй степени, (см. практические задания 13, 14), то с целью определения площади созданной таким образом криволинейной трапеции необходимо будет провести его интегрирование, реализуемое в данном случае в аналитическом виде. Проведя элементарные вычисления, получим для каждого элементарного интервала:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\approx\frac{h}{6}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)+4f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\right].$$

Суммируя результаты интегрирования по каждому интервалу, получим общую площадь криволинейной трапеции.

Согласно теории, ошибка метода Симпсона пропорциональна произведению 4-й степени используемого шага на значение четвертой производной подинтегральной функции. Тем самым по сравнению с двумя предыдущими методами для этого метода можно ожидать более высокой скорости сходимости, т.е. достижения необходимой точности вычислений за меньшее число шагов. Кроме этого, метод будет безошибочным для подинтегральных функций, представляющих собой полиномы первого и второго порядка. Однако необходимо отметить, что об обязательном использовании метода Симпсона с целью численного интегрирования можно говорить только в случае необходимости численного интегрирования на очень широких интервалах или огромных по величине массивах данных, позволяющих предположить, что число вычислений будет очень большим. Во всех прочих случаях выбор метода, скорее, будет определяться предпочтениями пользователя, поскольку все отличие между методами при использовании табличного процессора Excel будет заключаться только в выборе иного шага и протягивании расчетных выражений вниз на большее или меньшее число строк.

Порядок выполнения работы:

С целью проверки точности метода используем его для вычисления значения интеграла, который может быть подсчитан аналитически.

$$\int_{2}^{10} \frac{1}{x}\,dx = \ln(10) - \ln(2) = 1{,}609438$$

Произведем вначале расчеты по методу прямоугольников с шагом 0,1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	a	b	ln(a)	ln(b)	S						
2	2	10	0,693147	2,302585	1,609438						
3	шаг										
4	0,1		метод прямоугольников								
5			a	b	серидина	f(a)	f(b)	f(сер)	s1	s2	s3
6			2	2,1	2,05	0,5	0,47619	0,487805	0,05	0,047619	0,04878
7			2,1	2,2	2,15	0,47619	0,454545	0,465116	0,047619	0,045455	0,046512
8			2,2	2,3	2,25	0,454545	0,434783	0,444444	0,045455	0,043478	0,044444
9			2,3	2,4	2,35	0,434783	0,416667	0,425532	0,043478	0,041667	0,042553

Формульное выражение

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	a	b	ln(a)	ln(b)	S						
2	2	10	=LN(A2)	=LN(B2)	=D2-C2						
3	шаг										
4	0,1		метод прямоугольников								
5			a	b	серидина	f(a)	f(b)	f(сер)	s1	s2	s3
6			=A2	=C6+$A$4	=(C6+D6)/2	=1/C6	=1/D6	=1/E6	=F6*$A$4	=G6*$A$4	=H6*$A$4
7			=D6	=C7+$A$4	=(C7+D7)/2	=1/C7	=1/D7	=1/E7	=F7*$A$4	=G7*$A$4	=H7*$A$4
8			=D7	=C8+$A$4	=(C8+D8)/2	=1/C8	=1/D8	=1/E8	=F8*$A$4	=G8*$A$4	=H8*$A$4
9			=D8	=C9+$A$4	=(C9+D9)/2	=1/C9	=1/D9	=1/E9	=F9*$A$4	=G9*$A$4	=H9*$A$4

Осуществив протягивание формул вниз вплоть до достижения значения аргумента слева 9,9, получим для суммарных площадей следующие значения:

1, 1, 1,
629638 589638 609338

Данный результат в значениях сумм не удивляет, поскольку подинтегральная функция убывает. Как и следовало ожидать, лучший результат будет достигнут для середины интервала. Ошибка вычисления слева и справа составляет порядка 0,02, в то время как посередине ее величина всего лишь порядка 0,0001.

Повторим операция с шагом 0,05. В итоге получим

1, 1, 1,

619488 599488 609413

Как и ожидалось, точность вычислений посередине повысилась до 0,00001, в то время как по краям она составила 0,005.

Произведем теперь расчет для метода трапеций с шагом 0,1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a	b	ln(a)	ln(b)	S				
2	2	10	0,693147	2,302585	1,609438				
3	шаг								
4	0,1		метод прямоугольников						
5			a	b	серидина	f(a)	f(b)	f(сер)	si
6			2	2,1	2,05	0,5	0,47619	0,488095	0,04881
7			2,1	2,2	2,15	0,47619	0,454545	0,465368	0,046537
8			2,2	2,3	2,25	0,454545	0,434783	0,444664	0,044466
9			2,3	2,4	2,35	0,434783	0,416667	0,425725	0,042572

Формульное выражение:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a	b	ln(a)	ln(b)	S				
2	2	10	=LN(A2)	=LN(B2)	=D2-C2				
3	шаг								
4	0,1		метод прямоугольников						
5			a	b	серидина	f(a)	f(b)	f(сер)	si
6			=A2	=C6+$A$4	=(C6+D6)/2	=1/C6	=1/D6	=(F6+G6)/2	=H6*$A$4
7			=D6	=C7+$A$4	=(C7+D7)/2	=1/C7	=1/D7	=(F7+G7)/2	=H7*$A$4
8			=D7	=C8+$A$4	=(C8+D8)/2	=1/C8	=1/D8	=(F8+G8)/2	=H8*$A$4
9			=D8	=C9+$A$4	=(C9+D9)/2	=1/C9	=1/D9	=(F9+G9)/2	=H9*$A$4

Расчет дает значение 1,609638, что сопоставимо по точности с результатами вычислений по методу прямоугольников для середины интервала (одинаковая ошибка метода). Очевидно, уменьшение шага вновь приведет к уменьшению значения ошибки метода.

Осуществим, наконец, вычисление интеграла по методу Симпсона с шагом 0,1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a	b	ln(a)	ln(b)	S				
2	2	10	0,693147	2,302585	1,609438				
3	шаг								
4	0,1		метод прямоугольников						
5			a	b	серидина	f(a)	f(b)	f(сер)	si
6			2	2,1	2,05	0,5	0,47619	0,487805	0,04879
7			2,1	2,2	2,15	0,47619	0,454545	0,465116	0,04652
8			2,2	2,3	2,25	0,454545	0,434783	0,444444	0,044452
9			2,3	2,4	2,35	0,434783	0,416667	0,425532	0,04256

Формульное выражение

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a	b	ln(a)	ln(b)	S				
2	2	10	=LN(A2)	=LN(B2)	=D2-C2				
3	шаг								
4	0,1		метод прямоугольников						
5			a	b	серидина	f(a)	f(b)	f(сер)	si
6			=A2	=C6+$A$4	=(C6+D6)/2	=1/C6	=1/D6	=1/E6	=$A$4/6*(F6+4*H6+G6)
7			=D6	=C7+$A$4	=(C7+D7)/2	=1/C7	=1/D7	=1/E7	=$A$4/6*(F7+4*H7+G7)
8			=D7	=C8+$A$4	=(C8+D8)/2	=1/C8	=1/D8	=1/E8	=$A$4/6*(F8+4*H8+G8)
9			=D8	=C9+$A$4	=(C9+D9)/2	=1/C9	=1/D9	=1/E9	=$A$4/6*(F9+4*H9+G9)

Результаты вычислений дают в качестве итоговой площади 1,609438, что совпадает с точностью вычислений, проведенных в табличном процессоре Excel с использованием встроенной логарифмической функции.

Задания для самостоятельной работы

Осуществите численное интегрирование приведенных ниже интегралов. Оцените точность Ваших расчетов.

1. $\int_2^{10} \frac{1}{x^2} dx$, 2. $\int_2^{10} \frac{1}{\ln x} dx$, $\int_2^{10} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$, 4. $\int_2^{10} \frac{\sin x}{x^2} dx$, 5. $\int_2^{10} e^x dx$, 6 $\int_2^{10} e^{-x} dx$

7, $\int_2^{10} \cos^2 x dx$, 8. $\int_2^{10} \sin^2 x dx$, 9. $\int_2^{10} \frac{1}{1+x^2} dx$, 10. $\int_2^{10} \frac{1}{1+x^2-x} dx$

Практическое задание 19.

Расчет значения функции с помощью рядов.

Теоретические положения.

Предположим, что есть некоторая непрерывная, конечно или бесконечно дифференцируемая функция f(x), которая может быть представлена в виде степенного ряда

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \mathbf{K} + a_nx^n + \mathbf{K} = f(x)$$

Определим значения неизвестных коэффициентов a_i. Для этого начнем последовательно дифференцировать степенной ряд, поучая таким образом первую, вторую и т.п. производную функции f(x).

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \mathbf{K} + na_nx^{n-1} + \mathbf{K} = f'(x)\,,$$

$$2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \mathbf{K} + n\cdot(n-1)a_nx^{n-2} + \mathbf{K} = f''(x)$$

$$3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4x + 5\cdot 4\cdot 3a_5x^2 + \mathbf{K} + n\cdot(n-1)\cdot(n-2)a_nx^{n-3} + \mathbf{K} = f'''(x)$$

…………........

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\mathbf{K}\cdot 3\cdot 2\cdot 1 + n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\mathbf{K}\cdot 3\cdot 2a_nx + \mathbf{K} = f^{(n)}(x)$$

Если будем вычислять значения полученных в точке x=0, получим:

$$f(0) = a_0\,,\quad f^{/}(0) = a_1\,,\quad f^{//}(0) = 2a_2\,,\quad f^{///}(0) = 3\cdot 2a_3\quad \ldots.$$

$$f^{(n)}(0) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\mathbf{K}\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!\cdot a_n\quad \ldots..$$

Отсюда значения неизвестных коэффициентов будут равны:

$$a_0 = f(0)\,,\ a_1 = \frac{f^{/}(0)}{1!},\ \ a_2 = \frac{f^{//}(0)}{2!},\ \ a_3 = \frac{f^{///}(0)}{3!},\ \ldots.a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots$$

В результате получим ряд, получивший название ряда Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{/}(0)}{1!}\cdot x + \frac{f^{//}(0)}{2!}\cdot x^2 + \mathbf{K}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + \mathbf{K}$$

На основании ряда Маклорена может быть получено более общее выражении для степенного ряда, получившее название ряда Тейлора:

$$a_0 = f(x_0)\,,\quad a_1 = \frac{f^{/}(x_0)}{1!},\quad a_2 = \frac{f^{//}(x_0)}{2!},\quad a_3 = \frac{f^{///}(x_0)}{3!},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{/}(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f^{//}(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \mathbf{K} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + \mathbf{K}$$

Очевидно, что в общем случае сходимость ряда будет достигаться не для любых значений аргумента. Для определения области сходимости данного ряда, т.е. выяснения интервала значений аргумента, при которых ряд сходится, необходимо определить радиус сходимости ряда R. Радиус сходимости может быть определен по следующей формуле как предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$$

Рассмотрим разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций (соответствующие расчеты рекомендуется провести самостоятельно).

а) разложение показательной функции $\mathbf{e^x}$.

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \mathbf{K} + \frac{1}{n!}x^n + \ldots.$$

Степенной ряд сходится на всей числовой оси:

б) Разложение синуса и косинуса.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \mathbf{K} + (-1)^{(n-1)} \cdot \frac{x^{(2n-1)}}{(2n-1)!} + \mathbf{K} \quad .$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathbf{K} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathbf{K}$$

Данные степенные ряды также сходятся на всей числовой оси. Из данных формул видно, что в случае представления рядом Маклорена четной функции степени x чётные степени, для нечётной функции – нечётные.

в) Биноминальный ряд.

Разложим в ряд Маклорена функцию: $f(x) = (1+x)^m$, где m– любое действительное число.

$$f(x) = (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \mathbf{K} + \frac{m(m-1)(m-2)\,\mathbf{K}\,(m-n+1)}{n!}x^n + \mathbf{K}$$

Интервал сходимости данного ряда $-1 < x < 1$.

Если m– целое положительное число, то ряд превращается в формулу бинома Ньютона.

г) логарифмическая функция $f(x) = \ln(1+x)$.

Представление данной функции в виде ряда Маклорена в нуле невозможно (бесконечное по величине значение производных). В связи в качестве опорной точки используется 1. Разложение в ряд дает:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \mathbf{K} + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathbf{K}$$

Область сходимости данного ряда $-1 < x \le 1$, так как в точке $x = 1$ получаем ряд Лейбница, который сходится. В левой же границе получаем гармонический ряд.

д) арктангенс

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \mathbf{K} + (-1)^{n-1}\frac{x^{(2n-1)}}{(2n-1)} + \mathbf{K}$$

Область сходимости $|x| < 1$.

Хотя вычисление значений элементарных функций с помощью рядов в настоящее время в явном виде нигде не используется (соответствующие расчетные алгоритмы встроены даже в простейший калькулятор), тем не менее, рекомендуется, чтобы обучающиеся приобрели навыки по использованию рядов для вычисления значений функций. В качестве примера можно привести функции Эйри, широко используемые в физике и астрономии. Можно показать, что несмотря на то, что существует несколько подходов к вычислению значений этих функции, наиболее точный расчет их значений проводится с помощью рядов.

Порядок выполнения работы.

Используя разложение в ряд Маклорена, необходимо исследовать его сходимость для следующих функций:

1. показательная функция e^x
2. sin x

3. $f(x) = arctgx$

Приведем вначале расчеты для показательной функции для относительно небольшого значения аргумента x=1:

	A	B	C	D	E
1	x=	1		1	f(x) расч
2	проверка		1	1	2
3	f(x)=	2,718282	2	0,5	2,5
4			3	0,166666667	2,666667
5			4	0,041666667	2,708333
6			5	0,008333333	2,716667
7			6	0,001388889	2,718056
8			7	0,000198413	2,718254
9			8	2,48016E-05	2,718279
10			9	2,75573E-06	2,718282
11			10	2,75573E-07	2,718282

Формульное выражение

	A	B	C	D	E
1	x=	1		1	f(x) расч
2	проверка		1	=1/ФАКТР(C2)*$B$1^C2	=D1+D2
3	f(x)=	=EXP(B1)	2	=1/ФАКТР(C3)*$B$1^C3	=E2+D3
4			3	=1/ФАКТР(C4)*$B$1^C4	=E3+D4
5			4	=1/ФАКТР(C5)*$B$1^C5	=E4+D5
6			5	=1/ФАКТР(C6)*$B$1^C6	=E5+D6
7			6	=1/ФАКТР(C7)*$B$1^C7	=E6+D7
8			7	=1/ФАКТР(C8)*$B$1^C8	=E7+D8
9			8	=1/ФАКТР(C9)*$B$1^C9	=E8+D9
10			9	=1/ФАКТР(C10)*$B$1^C10	=E9+D10
11			10	=1/ФАКТР(C11)*$B$1^C11	=E10+D11

Повторим расчет для большего значения x

	A	B	C	D	E
1	x=	8		1	f(x) расч
2	проверка		1	8	9
3	f(x)=	2980,958	2	32	41
4			3	85,33333333	126,3333
5			4	[illegible]	297
6			5	273,0666667	570,0667
7			6	364,0888889	934,1556
8			7	[illegible]	[illegible]
9			8	416,1015873	1766,350
10			9	369,8680776	2136,227
11			10	[illegible]	[illegible]
12			11	215,1950724	2647,317
13			12	143,4639816	2790,781
14			13	[illegible]	[illegible]
15			14	50,44887266	2929,516
16			15	26,90606542	2956,422
17			16	[illegible]	[illegible]
18			17	6,330808022	2976,206
19			18	2,813700187	2979,019
20			19	1,184718395	2980,204
21			20	0,473887358	2980,678
22			21	[illegible]	[illegible]
23			22	0,065646734	2980,924
24			23	0,022833646	2980,947
25			24	[illegible]	[illegible]
26			25	0,002435589	2980,957
27			26	0,000749412	2980,958
28			27	[illegible]	[illegible]

Расчет показывает, что необходимое совпадение по точности было достигнуто только начиная с 27-го члена ряда. Увеличение аргумента x до 20 приводит к совпадению по точности начиная с 53-го члена. Таким образом, как это и следовало из теории, хотя ряд и является сходящимся, однако увеличение значения аргумента ведет к необходимости учета в расчетах большего числа членов ряда.

Проделаем теперь расчеты для функции sin(x). Определим вначале значение синуса для аргумента π/2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x=	1,5707						f(x) расч
2	проверка		1	1	1	1,5707	1,5707	1,5707
3	f(x)=	1	3	2	-1	-0,64585	-0,64585	0,924855
4			5	3	1	0,079668	0,079668	1,004523
5			7	4	-1	-0,00468	-0,00468	0,999843
6			9	5	1	0,00016	0,00016	1,000004
7			11	6	-1	-3,6E-06	-3,6E-06	1
8			13	7	1	5,69E-08	5,69E-08	1

Формульное выражение:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x=	=3,1414/2						f(x) расч
2	проверка		1	1	=(-1)^(D2+1)	=(1/ФАКТР(C2))*($B$1^C2)*E2	=F2	=G2
3	f(x)=	=SIN(B1)	3	2	=(-1)^(D3+1)	=(1/ФАКТР(C3))*($B$1^C3)*E3	=F3	=H2+G3
4			5	3	=(-1)^(D4+1)	=(1/ФАКТР(C4))*($B$1^C4)*E4	=F4	=H3+G4
5			7	4	=(-1)^(D5+1)	=(1/ФАКТР(C5))*($B$1^C5)*E5	=F5	=H4+G5
6			9	5	=(-1)^(D6+1)	=(1/ФАКТР(C6))*($B$1^C6)*E6	=F6	=H5+G6
7			11	6	=(-1)^(D7+1)	=(1/ФАКТР(C7))*($B$1^C7)*E7	=F7	=H6+G7
8			13	7	=(-1)^(D8+1)	=(1/ФАКТР(C8))*($B$1^C8)*E8	=F8	=H7+G8

Как видно, необходимая точность была достигнута уже начиная с 6-го члена ряда. Повторим расчет для значения 15,707 (примерно 5π).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x=	15,707						f(x) расч
2	проверка		1	1	1	15,707	15,707	15,707
3	f(x)=	0,000963268	3	2	-1	-645,8452664	-645,8452664	-630,138
4			5	3	1	7966,819407	7966,819407	7336,681
5			7	4	-1	-46797,44793	-46797,44793	-39460,8
6			9	5	1	160352,6571	160352,6571	120891,9
7			11	6	-1	-359641,6347	-359641,6347	-238750
8			13	7	1	568763,6757	568763,6757	330013,9
9			15	8	-1	-668188,574	-668188,574	-338175
10			17	9	1	606061,4051	606061,4051	267886,8
11			19	10	-1	-437196,8355	-437196,8355	-169310
12			21	11	1	256811,3459	256811,3459	87501,27
13			23	12	-1	-125213,2181	-125213,2181	-37711,9
14			25	13	1	51485,55689	51485,55689	13773,61
15			27	14	-1	-18094,0085	-18094,0085	-4320,4
16			29	15	1	5497,500128	5497,500128	1177,103
17			31	16	-1	-1458,373577	-1458,373577	-281,27
18			33	17	1	340,7150805	340,7150805	59,44465
19			35	18	-1	-70,63677819	-70,63677819	-11,1921
20			37	19	1	13,08317484	13,08317484	1,891049
21			39	20	-1	-2,177967671	-2,177967671	-0,28692
22			41	21	1	0,327637851	0,327637851	0,040719
23			43	22	-1	-0,04475719	-0,04475719	-0,00404
24			45	23	1	0,005576788	0,005576788	0,001539
25			47	24	-1	-0,000636378	-0,000636378	0,000902
26			49	25	1	6,6752E-05	6,6752E-05	0,000969
27			51	26	-1	-6,45818E-06	-6,45818E-06	0,000963
28			53	27	1	5,7812E-07	5,7812E-07	0,000963

Как и следовало ожидать, объем вычислений увеличился, однако сходимость все же была достигнута.

Необходимо отметить, что в случае «больших» значений аргумента, (в районе x=100 и выше) точность расчетов табличного процессора Excel для больших значений степени (например, x^{43}) начинает падать, в связи с чем результат вычислений может привести к расходящемуся ряду, даже если ряд по своей природе является сходящимся.

Проведем, в завершение, вычисления для функции $f(x) = arctgx$ для значений аргумента, близких к 0 и 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x=	0,1						f(x) расч
2	проверка		1	1	1	0,1	0,1	0,1
3	f(x)=	0,099669	3	2	-1	-0,00033	-0,00033	0,099667
4			5	3	1	0,000002	0,000002	0,099669
5			7	4	-1	-1,4E-08	-1,4E-08	0,099669
6			9	5	1	1,11E-10	1,11E-10	0,099669

Формульное выражение:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x=	=0,1						f(x) расч
2	проверка		1	1	=(-1)^(D2+1)	=(1/C2)*($B$1^C2)*E2	=F2	=G2
3	f(x)=	=ATAN(B1)	3	2	=(-1)^(D3+1)	=(1/C3)*($B$1^C3)*E3	=F3	=H2+G3
4			5	3	=(-1)^(D4+1)	=(1/C4)*($B$1^C4)*E4	=F4	=H3+G4
5			7	4	=(-1)^(D5+1)	=(1/C5)*($B$1^C5)*E5	=F5	=H4+G5
6			9	5	=(-1)^(D6+1)	=(1/C6)*($B$1^C6)*E6	=F6	=H5+G6
7			11	6	=(-1)^(D7+1)	=(1/C7)*($B$1^C7)*E7	=F7	=H6+G7

x=0,8

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x=	0,8						f(x) расч
2	проверка		1	1	1	0,8	0,8	0,8
3	f(x)=	0,6747	3	2	-1	-0,170666667	-0,17067	0,629333
4			5	3	1	0,065536	0,065536	0,694869
5			7	4	-1	-0,029959314	-0,02996	0,66491
6			9	5	1	0,014913081	0,014913	0,679823
7			11	6	-1	-0,007809031	-0,00781	0,672014
8			13	7	1	0,004228891	0,004229	0,676243
9			15	8	-1	-0,002345625	-0,00235	0,673897
10			17	9	1	0,001324588	0,001325	0,675222
11			19	10	-1	-0,000758501	-0,00076	0,674463
12			21	11	1	0,000439208	0,000439	0,674903
13			23	12	-1	-0,00025665	-0,00026	0,674646
14			25	13	1	0,000151116	0,000151	0,674797
15			27	14	-1	-8,95501E-05	-9E-05	0,674708
16			29	15	1	5,33595E-05	5,34E-05	0,674761
17			31	16	-1	-3,19468E-05	-3,2E-05	0,674729
18			33	17	1	1,92068E-05	1,92E-05	0,674748

Как видно, дальнейший рост x приведет к ожидаемому увеличению числа членов ряда, которые должны быть учтены в расчетах

Задания для самостоятельной работы

Осуществите разложение функции в ряд Маклорена и исследуйте его сходимость:

1. $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 2. $f(x)=x\cdot e^{x}$ 3. $f(x)=x\cdot e^{-x}$ 4. $f(x)=\sin 4x$ 5. $f(x)=e^{-x}-e^{x}$

6. $f(x)=\sin\frac{x}{3}$ 7. $f(x)=\cos\frac{x}{3}$ 8. $f(x)=\sin x\cdot x$ 9. $f(x)=\ln(2+x)$ 10. $f(x)=\sqrt{x}$

Практическое задание 20.

Примеры решения дифференциальных уравнений.

Теоретические положения. Численные методы решения дифференциальных уравнений представляют собой отдельный крупный раздел вычислительной математики, подробное изложение которого потребовало бы специального пособия. Поэтому в рамках данного задания мы рассмотрим только несколько простейших методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, т.е. уравнений, содержащих одну независимую переменную x и одну или несколько производных от искомой функции y = y(x)

$F(x, y, y', \dots , y^{(n)}) = 0$

Наивысший порядок производной называется порядком дифференциального уравнения.

В некоторых случаях из общей записи дифференциального уравнения удается выразить старшую производную в явном виде, как, например

$y' = f(x, y)$, $y'' = f(x, y, y')$

Данные дифференциальные уравнения называется уравнениями, разрешенным относительно старшей производной.

Линейным дифференциальным уравнением называется уравнение, линейное относительно искомой функции y и ее производных. Например, дифференциальное уравнение

$y' - x^2\cdot y = \sin(x)$

представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Решением дифференциального уравнения называют всякую функцию y=φ(x), которая при подстановке ее в дифференциальное уравнение превращает его в тождество. Поскольку решение дифференциального уравнения в своей сути предполагает интегрирование, можно предположить, что его решение без каких-либо дополнительных условий может быть получено только с точностью до констант. В связи с этим общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка будет содержать n произвольных констант $C_1, C_2, \dots , C_n$

$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots , C_n)$

Частным решением дифференциального уравнения называется функция $\varphi(x, C_1, C_2, \dots , C_n)$, в которой константы принимают строго определенное значение. Условия, позволяющие определить константы, называются начальными условиями. Очевидно, что уравнения n-го порядка потребуется n начальных условий.

В зависимости от способа задания дополнительных условий выделяют два различных типа задач: задачу Коши и краевую задачу. Если начальные условия задаются в одной точке, то такая задача называется задачей Коши, а точка $x = x_0$, в которой они задаются - начальной точкой. Если же дополнительные условия задаются в более чем одной точке, то такая задача называется краевой, а дополнительные условия называются при краевыми. На практике обычно граничные условия задаются в двух точках на концах интервала, для которого ищется решение дифференциального уравнения. Приведем примеры:

Задача Коши:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \sin x, \quad x > 0, \quad y(0) = 2$$

Краевая задача:

$$y'' + y' - y = \sin x, \quad x > 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(0) = 1$$

Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений разбивают на следующие группы: графические, аналитические, приближенные и численные. В графических методах используются геометрические построения. Аналитические методы изучаются в рамках математического анализа или теории дифференциальных уравнений. Приближенные методы используют различные упрощения уравнений. Численные методы используют методы вычислительной математики. Ниже будут приведены несколько простейших методов.

а) Метод Эйлера

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ с начальным условием $y_0 = y(x_0)$. Пусть, далее, его точным решением является функция $y = y(x)$, определенная на некотором интервале $[x_0, x_k]$. Разобьем этот интервал на n равных частей с шагом h

$$h = \frac{x_k - x_0}{n}$$

Для расчета значения функции y_1 в точке x_1 достаточно через точку начальных условий (x_0,y_0) провести касательную к графику функции $y(x)$ до пересечения с вертикальной прямой $x = x_1$. Тангенс угла наклона касательной есть

$$tg(a) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

С другой стороны, из дифференциального уравнения следует, что тангенс угла наклона касательной в точке (x_0,y_0) будет равен $f(x_0,y_0)$. Следовательно

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = f(x_0, y_0)$$

Отсюда

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

На следующем шаге, т.е. при вычислении y_2 определяется производная в (x_1, y_1), и из нее проводится касательная до пересечения с прямой $x = x_2$:

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1), \quad x_1 = x_0 + h$$

Аналогичные шаги выполняются на всем интервале интегрирования. В результате вычислений получается некоторая ломаная линия, не совпадающая с интегральной кривой, но, в тоже время, совпадающая с касательной к интегральной кривой в каждой из узловых точек. Если сравнить численное решение дифференциального уравнения с точным, то можно заметить, что ошибка метода при крупном шаге будет довольно существенной.

б) модифицированный метод Эйлера

В отличие от рассмотренного выше простого метода Эйлера, когда для вычисления следующей точки (x_{i+1},y_{i+1}) требуется информация только о предыдущей точке (x_i,y_i), модифицированный метод включает в расчеты данные о некоторой промежуточной точке, обычно лежащей посередине между точками (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}). Алгоритм модифицированного метода Эйлера состоит в следующем.

Через точку (x_i, y_i), как и в методе обычном методе Эйлера, проводится касательная с тангенсом угла наклона $tg(\alpha_1) = f(x_i,y_i)$, однако в данном случае лишь до пересечения с прямой $x_i{*}= x_i + h/2$. В полученной точке пересечения по методу Эйлера рассчитывается новое значение функции $y_i{*}=y_i+h/2\cdot f(x_i, y_i)$ и из дифференциального уравнения для новой точки вычисляется производная

$$f(x_i{*}, y_i{*}) = f(x_i + h/2, y_i + h/2\cdot y'_i)$$

Значение этой производной определяет тангенс угла наклона касательной в новой точке $tg(\alpha_2)$. Далее осуществляется возврат в исходную точку (x_i,y_i), и через нее проводится новая прямая, параллельная второй касательной, до пересечения с прямой $x = x_{i+1}$

$$y_{i+1} = y_i + h\cdot tg(\alpha_2) = y_i + h\cdot f(x_i + h/2, y_i + h/2\cdot y'_i)$$

Точность решения в модифицированном методе Эйлера увеличивается благодаря тому, что расчет функции на каждом шаге интегрирования выполняется два раза. Данная схема называется также еще методом "предиктор – корректор"(предсказывающее–исправляющее). На первом этапе предсказывается некоторое приближенное значение, а на втором этапе это предсказание исправляется. Благодаря повышению точности метода, шаг может быть увеличен.

в) Метод Рунге-Кутта

Данный метод аналогичен по своей сути исправленному модифицированному методу Эйлера. Алгоритм этого метода может быть представлен в виде:

$y_{i+1} = y_i + h/6\cdot(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$, $i = 0,1, \dots$

$k_0 = f(x_i , y_i)$

$k_1 = f(x_i + h/2 , y_i + k_0{*}h/2)$

$k_2 = f(x_i + h/2 , y_i + k_1{*}h/2)$

$k_3 = f(x_i + h , y_i + k_2{*}h)$

Таким образом, данный метод требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части уравнения $f(x,y)$. Метод требует большего объема вычислений, однако дает возможность провести расчет с большим шагом. Другими словами, для получения результатов с одинаковой точностью в модифицированном методе Эйлера потребуется значительно меньший шаг, чем в методе Рунге-Кутта.

Модифицированный метод Эйлера и метод Рунге-Кутта обладают рядом достоинств:

1. позволяют провести расчет с достаточно высокой точностью;
2. допускают использование переменного шага, что даёт возможность получать хороший результат в тех областях, где значения функции быстро изменяются;
3. являются легко применимыми, так как для начала расчёта достаточно выбрать сетку x и задать значение y_0 для x_0.

Порядок выполнения работы:

Возьмем в качестве примера для исследования работы методов дифференциальное уравнение, точное решение которого известно:

$$y' = -\frac{y}{x}, \quad y(1) = 2, \quad y = \frac{2}{x}$$

Получим вначале численное решение данного уравнения на интервале [1,5] методом Эйлера, используя различный шаг, и сравним полученные значений неизвестной функции со значениями, поученными с помощью аналитического решения. Проведем вначале расчет с шагом 0,5.

	P	Q	R	S	T
4		x0	y0		y(теор)
5	шаг =	0,5		f(x0,y0)	
6		1	2	-2	2
7		1,5	1	-0,66667	1,333333
8		2	0,666667	-0,33333	1
9		2,5	0,5	-0,2	0,8
10		3	0,4	-0,13333	0,666667
11		3,5	0,333333	-0,09524	0,571429
12		4	0,285714	-0,07143	0,5
13		4,5	0,25	-0,05556	0,444444
14		5	0,222222	-0,04444	0,4

Формульное выражение

	P	Q	R	S	T
4		x0	y0		y(теор)
5	шаг =	0,5		f(x0,y0)	
6		1	2	=-R6/Q6	=2/Q6
7		=Q6+$Q$5	=R6+$Q$5*S6	=-R7/Q7	=2/Q7
8		=Q7+$Q$5	=R7+$Q$5*S7	=-R8/Q8	=2/Q8
9		=Q8+$Q$5	=R8+$Q$5*S8	=-R9/Q9	=2/Q9
10		=Q9+$Q$5	=R9+$Q$5*S9	=-R10/Q10	=2/Q10
11		=Q10+$Q$5	=R10+$Q$5*S10	=-R11/Q11	=2/Q11
12		=Q11+$Q$5	=R11+$Q$5*S11	=-R12/Q12	=2/Q12
13		=Q12+$Q$5	=R12+$Q$5*S12	=-R13/Q13	=2/Q13
14		=Q13+$Q$5	=R13+$Q$5*S13	=-R14/Q14	=2/Q14

Как видно из расчетов, говорить о хорошем совпадении теоретических и вычисленных значений функции y не представляется возможным. Повторим расчет с шагом 0,01.

	P	Q	R	S	T
4		x0	y0		y(теор)
5	шаг	0,01		f(x0,y0)	
6		1	2	-2	2
7		1,01	1,98	-1,96	1,980198
8		1,02	1,9604	-1,92	1,960784
9		1,03	1,94118	-1,88	1,941748
10		1,04	1,92233	-1,85	1,923077
11		1,05	1,90385	-1,81	1,904762
12		1,06	1,88571	-1,78	1,886792
13		1,07	1,86792	-1,75	1,869159
14		1,08	1,85047	-1,71	1,851852
15		1,09	1,83333	-1,68	1,834862
16		1,1	1,81651	-1,65	1,818182
17		1,11	1,8	-1,62	1,801802
18		1,12	1,78378	-1,59	1,785714
19		1,13	1,76786	-1,56	1,769912

Теперь результаты расчетов, как и следовало ожидать, дают повышение точности, а именно, совпадение теоретических и вычисленных значений в области второй цифры после запятой.

Проведем теперь расчеты, используя модифицированный метод Эйлера. Вначале используем шаг 0,5

	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
3								
4		xi	yi					
5	шаг =	0,5		f(xi,yi)	xi*	yi*	f(xi*,yi*)	yтеор
6		1	2	-2	1,25	1,5	-1,2	2
7		1,5	1,4	-0,93333	1,75	1,166667	-0,66667	1,333333
8		2	1,066667	-0,53333	2,25	0,933333	-0,41481	1
9		2,5	0,859259	-0,3437	2,75	0,773333	-0,28121	0,8
10		3	0,718653	-0,23955	3,25	0,658765	-0,2027	0,666667
11		3,5	0,617305	-0,17637	3,75	0,573211	-0,15286	0,571429
12		4	0,540876	-0,13522	4,25	0,507072	-0,11931	0,5
13		4,5	0,481221	-0,10694	4,75	0,454486	-0,09568	0,444444
14		5	0,43338	-0,08668	5,25	0,411711	-0,07842	0,4

Формульное выражение

	V	W	X	Y	Z	AA	AB	A
4		xi	yi					
5	шаг =	0,5		f(xi,yi)	xi*	yi*	f(xi*,yi*)	yтеор
6		1	2	=-X6/W6	=W6+$W$5/2	=X6+$W$5/2*Y6	=-AA6/Z6	=2/W6
7		=W6+$W$5	=X6+$W$5*AB6	=-X7/W7	=W7+$W$5/2	=X7+$W$5/2*Y7	=-AA7/Z7	=2/W7
8		=W7+$W$5	=X7+$W$5*AB7	=-X8/W8	=W8+$W$5/2	=X8+$W$5/2*Y8	=-AA8/Z8	=2/W8
9		=W8+$W$5	=X8+$W$5*AB8	=-X9/W9	=W9+$W$5/2	=X9+$W$5/2*Y9	=-AA9/Z9	=2/W9
10		=W9+$W$5	=X9+$W$5*AB9	=-X10/W10	=W10+$W$5/2	=X10+$W$5/2*Y10	=-AA10/Z10	=2/W10
11		=W10+$W$5	=X10+$W$5*AB10	=-X11/W11	=W11+$W$5/2	=X11+$W$5/2*Y11	=-AA11/Z11	=2/W11
12		=W11+$W$5	=X11+$W$5*AB11	=-X12/W12	=W12+$W$5/2	=X12+$W$5/2*Y12	=-AA12/Z12	=2/W12
13		=W12+$W$5	=X12+$W$5*AB12	=-X13/W13	=W13+$W$5/2	=X13+$W$5/2*Y13	=-AA13/Z13	=2/W13
14		=W13+$W$5	=X13+$W$5*AB13	=-X14/W14	=W14+$W$5/2	=X14+$W$5/2*Y14	=-AA14/Z14	=2/W14

Таким образом, даже при относительно большом шаге достигается неплохая точность. Повторим расчет с шагом 0,01

	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
4		xi	yi					
5	шаг	0,01		f(xi,yi)	xi*	yi*	f(xi*,yi*)	утеор
6		1	2	-2	1,005	1,99	-1,9801	2
7		1,01	1,9802	-1,96	1,015	1,9704	-1,941277	1,980198
8		1,02	1,96079	-1,92	1,025	1,95117	-1,903585	1,960784
9		1,03	1,94175	-1,89	1,035	1,93232	-1,86698	1,941748
10		1,04	1,92308	-1,85	1,045	1,91384	-1,831421	1,923077
11		1,05	1,90477	-1,81	1,055	1,8957	-1,796868	1,904762
12		1,06	1,8868	-1,78	1,065	1,8779	-1,763284	1,886792
13		1,07	1,86916	-1,75	1,075	1,86043	-1,730633	1,869159
14		1,08	1,85186	-1,71	1,085	1,84329	-1,69888	1,851852
15		1,09	1,83487	-1,68	1,095	1,82645	-1,667994	1,834862
16		1,1	1,81819	-1,65	1,105	1,80993	-1,637941	1,818182
17		1,11	1,80181	-1,62	1,115	1,79369	-1,608694	1,801802
18		1,12	1,78572	-1,59	1,125	1,77775	-1,580224	1,785714

Как видно, совпадение достигнуто теперь в области четвертого знака после запятой.

Рассмотрим, в завершение, алгоритм Рунге-Кутта. В начале проведем расчеты с шагом 0,5

По правому краю

	AF	AG	AH	AI	AJ			AM	AN	AO	AP
4	xi	yi									
5	0,5		k0	xi+h/2	yi+ko*h/2	k1	yi+k1*h/2	k2	yi+k2*h	k3	y(теор)
6	1	2	-2	1,25	1,5	-1,2	1,7	-1,36	1,32	-0,88	2
7	1,5	1,33333	-1,33333	1,75	1	-0,57143	1,19048	-0,68027	0,9932	-0,4966	1,33333
8	2	0,97222	-0,97222	2,25	0,72917	-0,32407	0,8912	-0,39609	0,77418	-0,30967	1
9	2,5	0,74537	-0,74537	2,75	0,55903	-0,20328	0,69455	-0,25256	0,61909	-0,20636	0,8
10	3	0,59008	-0,59008	3,25	0,44256	-0,13617	0,55604	-0,17109	0,50454	-0,14415	0,66667
11	3,5	0,47769	-0,47769	3,75	0,35827	-0,09554	0,4538	-0,12101	0,41718	-0,1043	0,57143
12	4	0,3931	-0,3931	4,25	0,29482	-0,06937	0,37575	-0,08841	0,34889	-0,07753	0,5
13	4,5	0,32758	-0,32758	4,75	0,24569	-0,05172	0,31465	-0,06624	0,29446	-0,05889	0,44444
14	5	0,27571	-0,27571	5,25	0,20679	-0,03939	0,26587	-0,05064	0,25039	-0,04553	0,4
15	5,5										

Формульное выражение

	AE	AF	AG	AH	AI	AJ
4		xi	yi			
5	шаг =	0,5		k0	xi+h/2	yi+ko*h/2
6		1	2	=-AG6/1	=AF6+$AF$5/2	=AG6+AH6*$AF$5/2
7		=AF6+$AF$5	=AG6+$AF$5/6*(AH6+2*AK6+2*AM6+AO6)	=-AG7/1	=AF7+$AF$5/2	=AG7+AH7*$AF$5/2
8		=AF7+$AF$5	=AG7+$AF$5/6*(AH7+2*AK7+2*AM7+AO7)	=-AG8/1	=AF8+$AF$5/2	=AG8+AH8*$AF$5/2
9		=AF8+$AF$5	=AG8+$AF$5/6*(AH8+2*AK8+2*AM8+AO8)	=-AG9/1	=AF9+$AF$5/2	=AG9+AH9*$AF$5/2
10		=AF9+$AF$5	=AG9+$AF$5/6*(AH9+2*AK9+2*AM9+AO9)	=-AG10/1	=AF10+$AF$5/2	=AG10+AH10*$AF$5/2
11		=AF10+$AF$5	=AG10+$AF$5/6*(AH10+2*AK10+2*AM10+AO10)	=-AG11/1	=AF11+$AF$5/2	=AG11+AH11*$AF$5/2
12		=AF11+$AF$5	=AG11+$AF$5/6*(AH11+2*AK11+2*AM11+AO11)	=-AG12/1	=AF12+$AF$5/2	=AG12+AH12*$AF$5/2
13		=AF12+$AF$5	=AG12+$AF$5/6*(AH12+2*AK12+2*AM12+AO12)	=-AG13/1	=AF13+$AF$5/2	=AG13+AH13*$AF$5/2
14		=AF13+$AF$5	=AG13+$AF$5/6*(AH13+2*AK13+2*AM13+AO13)	=-AG14/1	=AF14+$AF$5/2	=AG14+AH14*$AF$5/2

	AK	AL	AM	AN	AO	AP
4						
5	k1	yi+k1*h/2	k2	yi+k2*h	k3	y(теор)
6	=-AJ6/AI6	=AG6+AK6*$AF$5/2	=-AL6/AI6	=AG6+$AF$5*AM6	=-AN6/AF7	=2/AF6
7	=-AJ7/AI7	=AG7+AK7*$AF$5/2	=-AL7/AI7	=AG7+$AF$5*AM7	=-AN7/AF8	=2/AF7
8	=-AJ8/AI8	=AG8+AK8*$AF$5/2	=-AL8/AI8	=AG8+$AF$5*AM8	=-AN8/AF9	=2/AF8
9	=-AJ9/AI9	=AG9+AK9*$AF$5/2	=-AL9/AI9	=AG9+$AF$5*AM9	=-AN9/AF10	=2/AF9
10	=-AJ10/AI10	=AG10+AK10*$AF$5/2	=-AL10/AI10	=AG10+$AF$5*AM10	=-AN10/AF11	=2/AF10
11	=-AJ11/AI11	=AG11+AK11*$AF$5/2	=-AL11/AI11	=AG11+$AF$5*AM11	=-AN11/AF12	=2/AF11
12	=-AJ12/AI12	=AG12+AK12*$AF$5/2	=-AL12/AI12	=AG12+$AF$5*AM12	=-AN12/AF13	=2/AF12
13	=-AJ13/AI13	=AG13+AK13*$AF$5/2	=-AL13/AI13	=AG13+$AF$5*AM13	=-AN13/AF14	=2/AF13
14	=-AJ14/AI14	=AG14+AK14*$AF$5/2	=-AL14/AI14	=AG14+$AF$5*AM14	=-AN14/AF15	=2/AF14

Как видно из проведенных расчетов, достигнутая точность вычислений сравнима с точностью модифицированного метода Эйлера.

Проведем теперь расчеты с шагом 0,01

	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP
4		xi	yi									
5	шаг =	0,01		k0	xi+h/2	yi+ko*h/2	k1	yi+k1*h/2	k2	yi+k2*h	k3	y(теор)
6		1	2	-2	1,005	1,99	-1,98	1,9901	-1,98	1,980198	-1,96	2
7		1,01	1,980198	-2	1,015	1,970297	-1,94	1,970492	-1,94	1,960784	-1,92	1,9802
8		1,02	1,960752	-2	1,025	1,950948	-1,9	1,951235	-1,9	1,941716	-1,89	1,96078
9		1,03	1,941652	-1,9	1,035	1,931944	-1,87	1,932319	-1,87	1,922982	-1,85	1,94175
10		1,04	1,922889	-1,9	1,045	1,913275	-1,83	1,913735	-1,83	1,904576	-1,81	1,92308
11		1,05	1,904454	-1,9	1,055	1,894931	-1,8	1,895473	-1,8	1,886487	-1,78	1,90476
12		1,06	1,886337	-1,9	1,065	1,876906	-1,76	1,877526	-1,76	1,868708	-1,75	1,88679
13		1,07	1,868532	-1,9	1,075	1,859189	-1,73	1,859884	-1,73	1,851231	-1,71	1,86916
14		1,08	1,851029	-1,9	1,085	1,841774	-1,7	1,842541	-1,7	1,834047	-1,68	1,85185
15		1,09	1,83382	-1,8	1,095	1,824651	-1,67	1,825489	-1,67	1,817149	-1,65	1,83486
16		1,1	1,816899	-1,8	1,105	1,807815	-1,64	1,808719	-1,64	1,800531	-1,62	1,81818
17		1,11	1,800258	-1,8	1,115	1,791257	-1,61	1,792225	-1,61	1,784184	-1,59	1,8018
18		1,12	1,78389	-1,8	1,125	1,77497	-1,58	1,776001	-1,58	1,768103	-1,56	1,78571
19		1,13	1,767787	-1,8	1,135	1,758948	-1,55	1,760039	-1,55	1,75228	-1,54	1,76991

Из расчетов видно, что в данном случае даже несколько уступает модифицированному методу Эйлера.

Задания для самостоятельной работы

Используя метод Эйлера, модифицированный метод Эйлера и метод Рунге-Кутта, реализуйте численное решение следующих дифференциальных уравнений на интервале [1,5]

1. $y' = y - x$, 2. $y' = y - x^2$ 3. $y' = \dfrac{y}{2} - x$ 4. $y' = yx$ 5. $y' = y + x$

6. $y' = y - 3x$ 7. $y' = y^2 - x$ 8. $y' = 2y - x$ 9. $y' = 2y - 3x$ 10. $y' = y - \dfrac{x}{2}$

Контрольные вопросы

1. Оцените место вычислительной математики в системе естественных наук. Назовите преимущества и ограничения вычислительного эксперимента с использованием средств вычислительной техники. Перечислите основные моменты вычислительного эксперимента и раскройте их содержание.

2. Назовите источники погрешностей. Какова классификация погрешностей. Почему абсолютная погрешность числа не является достаточной характеристикой результатов вычислительного эксперимента? Что такое относительная погрешность числа? Как связана относительная погрешность с количеством верных знаков числа? Как осуществить округление числа?

3. Какие способы представления чисел в ЭВМ Вы знаете? Какие ограничения в точности вычислений с этим связаны? Расскажите о погрешностях вычисления на ЭВМ. В каких случаях можно говорить об отсутствии погрешностей?

4. Дайте определение системы линейных алгебраических уравнений. Какие виды задач приводят к необходимости решения таких систем? Всегда ли такие системы имеют однозначное решение? Осуществите классификацию численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.

5. Назовите известные методы решения систем линейных алгебраических уравнений, осуществите их сравнение. Каковы ограничения данных методов? Опишите алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений по методу исключения Гаусса.

6. В чем заключается задача приближенного решения нелинейного уравнения? Почему при решении нелинейного уравнения в большинстве случаев речь идет именно о приближенном решении? Какие основные этапы решения Вы можете выделить? Для чего необходима локализация корней? Что такое итерационное уточнение корней.

7. Охарактеризуйте прямые и итерационные методы решения нелинейного уравнения. Как оценить скорость сходимости процесса? В каком случае можно говорить о линейной и квадратичной сходимости? Опишите алгоритм метода половинного деления. Какой скоростью сходимости он обладает?

8. Опишите алгоритм метода простой итерации, метода Ньютона, метода секущих. Какой скоростью сходимости они обладают? Назовите условие применимости этих методов. В каких случаях методы будут расходиться?

9. Опишите алгоритм метода золотого сечения. Для чего оно используется? Какой скоростью сходимости он обладает? Назовите условие применимости этого метода. В каких случаях метод будет расходиться? Какие особенности данного метода Вам известны?

10. В чем заключается задача приближения функции. Почему говорят о двойственности этой задачи? Каким образом выбираются критерии близости исходной и приближающей функции? В чем заключается задача интерполяции?

Какие базовые функции можно использовать? Выведите интерполяционную формулу Лагранжа. Каковы ее преимущества и недостатки?

11. Выведите первую и вторую интерполяционную формулу Ньютона. В чем ее отличие от интерполяционной формулы Лагранжа? В чем заключаются преимущества и недостатки данной формулы?

12. В чем заключается алгоритм приближения для содержащихся в таблице узлов методом наименьших квадратов? Какие приближающие функции можно для этого использовать? Как правильно ввести критерий для оценки точности полученного результата?

13. В чем заключается задача экстраполяции функции? Как правильно реализовать алгоритм экстраполяции? Как проверить правильность проведенной экстраполяции?

14 В чем заключается основная задача численного интегрирования? Какие методы численного интегрирования Вам известны? Опишите алгоритмы метода прямоугольников, метода трапеций, метода Симпсона. Обладают ли данные методы одинаковой скоростью сходимости? Какова погрешность данных методов?

15. Как можно осуществить дифференцирование функции, заданной таблично? Какие методы численного дифференцирование Вам известны? Какова точность этих методов?

16. Какие методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений Вам известны? В чем заключается основная идея этих методов? Почему увеличение шага приводит к росту ошибки?

Список использованной литературы

1. Бахвалов, Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Учебник для вузов/ Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков - Издательство: Бином. Лаборатория знаний, 2017.-636с.

2. Пирумов У.Г. Численные методы. Учебник для вузов/ У.Г. Пирумов - Издательство: Дрофа, 2007.-221с.

Издается в авторской редакции
Подписано в печать 29.06.2023. Формат 60x90 $^{1}/_{16}$
Бумага кн.-журн. П.л. 6 Гарнитура Таймс.
Тираж 60 экз.

Воронежский филиал Федерального государственного образовательного учреждения высшего образования
«Государственный университет морского и речного флота имени
адмирала С.О. Макарова»
Типография Воронежского филиала ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени
адмирала С.О. Макарова», Воронеж, Ленинский проспект, 174л.